Lehrbuch

für den

gesammten mathematischen

Elementar-Unterricht

an Gymnasien, Realschulen, höhern Bürger- und Militär-Schulen.

Bearbeitet

von

Dr. Martin Ohm,

Ritter des rothen Adler-Ordens III. Klasse mit der Schleife; ord. öffentl. Professor der Mathematik an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität; Lehrer an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule zu Berlin; der Kais. Russ., so wie der Königl. Bayer. Akad. der Wissenschaften zu St. Petersburg und München, der Academia Pontificia de nuovi Lincei zu Rom, und mehrerer andern gelehrten Gesellschaften correspond. Mitglied.

Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage.

Mit einer Figurentafel.

Leipzig, 1856.
Emil Graul.

Auszug
aus der Vorrede zur dritten Auflage.

Dieser Leitfaden ist ein selbstständiger Auszug aus des Verfassers „Lehrbuch der gesammten Elementar-Mathematik in drei Theilen". Der besondere Beifall, dessen sich diese kleine Schrift erfreut, macht es dem Verfasser möglich, die während des Gebrauchs derselben sich ergebenden Erfahrungen bei jeder neuen Auflage benützen, und dadurch das Werkchen selbst immer mehr vereinfachen, abrunden und somit verbessern zu können. —

Unmittelbar an diesen Leitfaden schließt sich das in demselben Verlage 1839 erschienene „Kurze Lehrbuch der gesammten höhern Mathematik in zwei Bänden", so wie noch auf der andern Seite das „Kurze Elementar-Lehrbuch der mechanischen Wissenschaften, Berlin, bei Th. Chr. Fr. Enslin 1840." dergestalt an, daß man letztere, selbst ohne Lehrer, mit Erfolg wird studiren können.

Der Nutzen des gegenwärtigen Leitfadens wird vorzüglich darin bestehen:

a) daß der Lehrer die überall kostbare Zeit spart, die er sonst zum Diktiren der einfachsten und wichtigsten Sätze verwenden muß, um den Schülern wenigstens einige Halt-Punkte in die Hände gegeben zu haben;

b) daß dem Lehrer durch dieses Büchlein fortwährend Gelegenheit gegeben ist, die Schüler außer der Schulstunde zweckmäßig zu beschäftigen, in so fern er die Andeutungen zu den Entwickelungen oder zu den Beweisen schriftlich zur Ausführung bringen läßt, oder auch von dem Schüler nur verlangt, daß er sich zu Haùse dergestalt vorbereite, um diese Andeutungen in der nächsten Schulstunde zur Ausführung bringen zu können.

Der Verfasser wird endlich, so wie bisher, so auch fernerhin, jeden auf die Verbesserung seiner Schriften gerichteten, ihm freundlich gegebenen Wink mit Dank anerkennen, und, wenn nicht seine Grund-Ueberzeugung es ihm unmöglich macht, getreulich benützen.

Berlin, im December 1841.

Vorrede zur fünften Auflage.

Der Verf. hat sich bemüht, durch sorgfältige Durchsicht und Hinzufügung einiger neuen einfachen Sätze auch dieser fünften Auflage dem davon Gebrauch machenden Publikum seinen Dank zu bezeigen. Möge dieses Büchlein fortfahren, zur leichteren und gründlicheren Auffassung und zur Verbreitung der wichtigsten, weil elementaren, mathematischen Lehren beizutragen.

Berlin, im Juni 1856.

Prof. Dr. M. Ohm.

Inhalt.

Seite

Einleitung. (Nr. 1 — Nr. 6.) . . . . 1— 2

Arithmetik und Algebra.

A. Die Lehre der unbenannten Zahlen.

Kap. I. Vom Addiren und Subtrahiren. Von der Null und von dem additiven und subtraktiven Ausdruck. (§. 1. — §. 10.) . . . . 3— 10

Kap. II. Vom Multipliciren und Dividiren. Von den Brüchen. Von den positiven und negativen Zahlen. Reelle Zahlen. (§. 11. — §. 26.) . . 10— 24

Anhang. Von den Verhältnissen und Proportionen. (§. 26ª.) . . . . 24— 27

Kap. III. Von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen im Allgemeinen. (§. 27. — §. 35.) . . . . . 27— 33

Kap. IV. Von den bestimmten Zahlen. Gemeines Ziffern-Rechnen. Von den Decimal-Brüchen. (§. 36. — §. 45.) . . . . 33— 45

Kap. V. Einige Eigenschaften der bestimmten Zahlen. Primzahlen. Theiler. Vielfache. Ketten-Brüche. (§. 46. — §. 53.) . . . . 45— 56

Kap. VI. Praktische Buchstaben- und Ziffern-Rechnung. (§. 54. — §. 64.) . . . . 56— 62

Kap. VII. Der binomische Lehrsatz. Von den absoluten Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. (§. 65. — §. 77.) . . . . 62— 78

Kap. VIII. Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem und mit mehreren Unbekannten. (§. 78. — §. 84ª.) . . . . 79— 90

Kap. IX. Von den quadratischen, kubischen und andern Gleichungen. Von den allgemeinen und imaginären Quadrat-Wurzeln. (§. 85. — §. 100.) . . . . 90—108

B. Die Lehre der benannten Zahlen. (Allgemeine Größenlehre.) (§. 101. — §. 112ª.) 109—117

Ebene Geometrie.

		Seite
Kap. I.	Von den geraden Linien und Winkeln. Parallele und schneidende Linien. (§. 113. — §. 120a.) .	118—124
Kap. II.	Vergleichung der Seiten und Winkel in einem Dreieck. Kongruenz der Dreiecke. Folgerungen. (§. 121. — §. 129.)	124—129
Kap. III.	Von der Aehnlichkeit der Dreiecke, und der ebenen Figuren überhaupt. (§. 130. — §. 132.) . . .	129—133
Kap. IV.	Von der Vergleichung der Flächen bei Dreiecken, bei Parallelogrammen und bei geradlinigen Figuren überhaupt. (§. 133. — §. 141.)	133—140
Kap. V.	Vom Kreise und von den regulären Vielecken. (§. 142. — §. 157.)	140—150
Kap. VI.	Eine Auswahl von Sätzen zur Uebung. (§. 158. bis §. 165.)	150—155
Kap. VII.	Geometrisch-algebraische Aufgaben. (§. 166.) .	155—159
Kap. VIII.	Aufgaben der geometrischen Zeichenkunst. (§. 167. bis §. 171.)	159—166
Kap. IX.	Analytische Trigonometrie. (§. 172. — §. 189.)	166—179
Kap. X.	Ebene Trigonometrie; oder Berechnung ebener Dreiecke. (§. 190. — §. 196a.)	179—191

Körperliche Geometrie.

Kap. I.	Von der Lage der Linien und der Ebenen gegen einander. (§. 197. — §. 210.)	192—200
Kap. II.	Von den körperlichen Dreiecken, von den Pyramiden, Prismen, Cylindern, Kegeln und von der Kugel. (§. 211. — §. 216.)	200—209
Kap. III.	Sphärische Trigonometrie. (§. 217. — §. 226.)	209—216
Kap. IV.	Von den Projektionen und den Koordinaten im Raume. (§. 227. — §. 233.)	216—224

Anhang.

Einiges über Reihen, über Permutationen und Kombinationen; nebst dem Beweise des binomischen Lehrsatzes. (§. 1. — §. 12.)	225—233

Einleitung.

1) Die (unbenannte ganze) Zahl ist uns gegeben; wir erblicken in ihr (abstrakte) Einheiten.

2) Das Stetige (Raum, Zeit, Kraft) ist überall begrenzbar; das völlig begrenzte Stetige heißt eine Größe (Quantum). — Sie kann in eine benannte Zahl (Quantitas) umgewandelt werden. — Das Geschäft dieser Umwandlung heißt messen; die Einheit dieser benannten Zahl wird das Gemäß genannt; die unbenannte Zahl, welche das Resultat des Messens ist, mag man das Maaß nennen. —

Die (unbenannte) Zahl ist also das **Kennzeichen** der Größe und wir zählen sie selbst **nicht** mit zu den Größen.

3) Die Mathematik beschäftigt sich mit der Zahl und mit der Größe. — In einem naturgemäßen Vortrage der Mathematik muß vorangehen

die Lehre der (unbenannten) Zahlen (Arithmetik, Algebra, Analysis);

dann folgen

die Lehre der benannten Zahlen (allgemeine Größenlehre);

zuletzt aber muß noch gegeben werden

die Lehre der speziellen Größen (Geometrie, Mechanik).

4) Die (unbenannten ganzen) Zahlen sind entweder bestimmte, durch (einfache) Ziffern (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) oder durch (zusammengesetzte) Ziffern-Ausdrücke vorgestellte,

— oder unbestimmte (allgemeine), welche gewöhnlich durch Buchstaben oder Buchstaben-Ausdrücke bezeichnet werden. — Es ist zweckmäßig, wenn nicht nothwendig, im Vortrage diese letztern zuerst zu betrachten und dann erst die Ziffernlehre (und das Ziffern-Rechnen) folgen zu lassen *).

5) Bezeichnen zwei Ausdrücke A und B einerlei Zahl, so sagt man, „sie seien einander gleich," schreibt dies so: $A=B$, und nennt dieses Schema eine Gleichung.

6) Eine Zahl a heißt größer als eine andere b, und letztere wird dann die kleinere genannt, wenn zu der Zahl b noch eine oder mehrere Einheiten hinzugefügt werden müssen, damit die Zahl a erhalten werde. Man schreibt dies auch so:

$$a > b \qquad \text{oder} \qquad b < a.$$

*) Der Anfänger unterscheide ja immer sorgfältig Zahl und Ziffer von einander, und übersehe auch nicht, daß wir unter Zahl häufiger (und anfänglich immer) eine unbestimmte Zahl verstehen.

Arithmetik und Algebra.

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Erstes Kapitel.

Vom Addiren und Subtrahiren im Allgemeinen.

§. 1. Das Addiren zweier Zahlen a und b ist der bloße Gedanke des Zusammenfassens der Einheiten beider in eine dritte Zahl c. — Diese dritte Zahl c wird auch durch a+b bezeichnet, und dieses Zeichen a+b (nicht die dadurch bezeichnete Zahl) nennen wir Summe *). Das Hinschreiben der Summe a+b (wodurch der Gedanke versinnlicht wird) wird ebenfalls addiren genannt. Die Summe hat zwei Summanden.

§. 2. Man kann auch mehr als zwei Zahlen zu einander addiren, jedoch nur so, daß immer nur zwei addirt werden, und zu der, die herauskommt, eine dritte u. s. w. f. — Man spricht dann von „Summen mehrerer Summanden" und das Grundgesetz des Addirens ist

*) Siehe die Vorrede zum „Geist der mathematischen Analysis." Zweite Abhandlg. Erlangen 1846. — auch die Schlußanmerkung zum 2. Theil des „System's der Mathematik" in der 3. Auflage. Nürnberg 1855.

„daß die Summanden einer Summe beliebig mit einander „vertauscht werden können."

§. 3. Geht man im §. 1. von den Zahlen c und b zur Zahl a zurück, oder von den Zahlen c und a zur Zahl b, so hat man zwei dem Addiren gegenüber liegende Zahlen-Verbindungen, die (wegen $a+b=b+a$) in eine einzige zusammenfallen, welche Subtraktion genannt wird.

Die Differenz (das Zeichen) $c-b$ bedeutet also die Zahl, welche zu b addirt, c wiedergiebt. — In dieser Differenz $c-b$ heißt c der Minuend, b dagegen der Subtrahend. — Das Hinschreiben der Differenz $c-b$, in so fern dadurch der Gedanke versinnlicht und fest gehalten wird, ist das eigentliche Subtrahiren, und das Zeichen $c-b$ das nächste Resultat des Subtrahirens.

§. 4. Der Gegensatz, in welchem diese Addition und Subtraktion zu einander stehen, so wie das Grundgesetz im §. 2., sprechen sich in nachstehenden Gleichungen (Formeln genannt) so aus, wie die Anwendungen es wünschenswerth machen, nämlich:

A. Gesetze mit 2 Elementen.

⊙) $a+b=b+a$:

und I. $(a-b)+b=a$;

II. $(a+b)-b=a$;

III. $a-(a-b)=b$.

B. Gesetze mit 3 oder mehr Elementen.

1) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$;

2) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$;

3) $(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c)$;

4) $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c)$;

5) $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$;

6) $a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b$;

7) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$

und $(a-b)+(c-d)=(a-c)-(b-d)$;

8) $(a+c)-(b+c)=a-b=(a-c)-(b-c)$.

Man hat aber hier die zusammengesetzten Ausdrücke, welche wiederum, als Zahlen, mit andern in Verbindung treten sollten,

in Klammern eingeschlossen; was allemal geschehen muß, damit jeder Ausdruck ein völlig bestimmter, hinsichtlich seiner Bedeutung nicht zu verkennender, also kein zweideutiger sei.

Diese Gesetze sind so geschrieben, daß alle in den Anwendungen vorkommenden Formen (Ausdrücke) jedesmal am weitesten zur Linken der (=) Zeichen (in A. ⊙, I. II. III. und B. 1.—7.) aufgesucht werden können, so daß dann die zur Rechten stehenden Ausdrücke die Form der neuen Ausdrücke genau bestimmen, welche statt der gegebenen gesetzt werden dürfen.

§. 5. Dieses Umformen gegebener Ausdrücke mittelst solcher Gesetze heißt aber das Rechnen. — Wenn daher jeder, welcher das Schreiben erlernt hat (nach den §. 1. und §. 3.) sogleich (wirklich) addiren und subtrahiren kann, so kann doch keiner rechnen (mit Summen und Differenzen), der die Gesetze des §. 4. nicht kennt, oder der in ihrer Anwendung sich nicht geübt hat.

§. 6. Diese Gesetze werden aus der Betrachtung der (ganzen) Zahlen abstrahirt, können und müssen erwiesen werden*), sind aber, ganz allgemein, Gesetze des abstrakten Addirens und Subtrahirens, d. h. Gesetze des bloßen Gedankens, und können und müssen daher überall angewandt werden, wo ein Addiren oder Subtrahiren gedacht, d. h. angezeigt ist. Und nur das gedachte, folglich das angezeigte Addiren und Subtrahiren ist das wirkliche; alles Weitere ist höchstens ein Umformen (nach §. 5.) der, durch dieses wirkliche d. h. angezeigte Addiren und Subtrahiren erhaltenen Summen und Differenzen.

Werden aber die Gesetze, mittelst welcher gerechnet wird, so allgemein aufgefaßt, so gewinnt nicht bloß die Summe und die Differenz, sondern auch die Gleichung (Einleitung 5.) eine

---

*) Der größte Theil dieser Gesetze, namentlich alle Gesetze B. mit Ausnahme von B. Nr. 1. wird dadurch bewiesen, daß man auf jeder Seite ein und dasselbe addirt; und wenn dann auf jeder Seite ein und dasselbe herauskommt, so ist die Gleichung richtig.

Vgl. Ohm's „Elementar-Mathematik" I. Bd. 3te Aufl. Kap. 1. und dessen „System der Mathematik" I. Th. 3te Aufl. Kap. 1.

allgemeinere Bedeutung*). — Gleich sind danach zwei Ausdrücke A und B, welche für einander mit dem Bewußtsein gesetzt werden können, daß dadurch den Gesetzen der Zahlen-Verbindungen als Verstandesthätigkeiten (die man auch Operationen nennt) nicht widersprochen wird.

Die Gleichheit zweier durch Addition und Subtraktion zusammengesetzter, beliebig allgemeiner Ausdrücke A und B, wird aber daran erkannt, daß man einen dritten Ausdruck C zu jedem der beiden addirt, und zusieht, ob die Summen $A+C$ und $B+C$ in einen und denselben Ausdruck übergehen, sobald man Formen, wie $p+q$, $(p+q)+r$ und $(p-q)+q$ bezüglich mit $q+p$, $(p+r)+q$ und p vertauscht, den Merkmalen der allgemeinen Summe und Differenz entsprechend. — Aus diesem Begriff der allgemeinen Gleichheit geht noch hervor, daß, wenn zwei solche, durch angezeigte Addition und Subtraktion zusammengesetzte Ausdrücke, in diesem allgemeinern Sinne einander gleich sind, und nachgehends in den Anwendungen wirkliche Zahlen bezeichnen, solche dann allemal eine und dieselbe Zahl bezeichnen müssen.

§. 7. In diesem allgemeinern Sinne sind auch zwei solche Differenzen, wie $p-p$ und $z-z$ einander gleich**). Im Rechnen kann man daher alle solche Differenzen (in denen Minuend

---

*) Die allgemeine Summe ist eine bloße Form $a+b$, welche noch die Merkmale hat, daß $a+b$ mit $b+a$, und $(a+b)+c$ mit $(a+c)+b$ vertauscht werden kann. — Die allgemeine Differenz ist ebenfalls eine bestimmte Form $a-b$, welche noch das Merkmal hat, daß $(a-b)+b$ mit a, unbedingt vertauscht werden darf. — Dadurch, daß in den §. §. 1. 3. die Begriffe des Addirens und des Subtrahirens als das Bilden (Hinschreiben) der Summe $a+b$ und der Differenz $a-b$ festgestellt worden sind, sind diese Begriffe mit denen der Summe und der Differenz zu gleicher Zeit verallgemeinert.

**) Es ist nämlich

$$(p-p)+z=(p+z)-p=(z+p)-p=z;$$

folglich, wenn man z auf jeder Seite subtrahirt

$$[(p-p)+z]-z=z-z$$

d. h. (nach §. 4. A. II.) $p-p=z-z$.

und Subtrahend einander gleich geworden sind) durch *einen und denselben* Stellvertreter repräsentiren lassen. Man wählt dafür das Zeichen 0, und nennt solches *Null* *).

Mit der Null wird daher nach denselben Gesetzen des §. 4. gerechnet. — Wendet man aber letztere an, setzt man z. B. in §. 4. B. 3. das Zeichen b statt a, und in B. 6. b statt c, so erhält man:

$$1)\ 0+c=c+0=c; \qquad 2)\ a-0=a.$$

§. 8. Eine Differenz wie $0-b$, die zum Minuenden die Null hat, schreibt man gewöhnlich bloß so: $-b$, und denkt sich die Null als Minuend noch hinzu. Eben so schreibt man $+b$ und versteht darunter die Summe $0+b$, deren einer Summand die Null ist.

Solche Ausdrücke wie $+b$, $-b$, nennt man *additive* und *subtraktive*; b selbst heißt ihr *Glied*. Sie sind bloß Stellvertreter von Summen und Differenzen, und es wird daher nach den Gesetzen des §. 4. mit ihnen gerechnet. — Geschieht dies nun, und setzt man namentlich in B. Nr. 3. das Zeichen b statt a, so wie auch 0 statt a, und in B. Nr. 6. die 0 statt b, so erhält man, wenn zuletzt c mit b vertauscht wird,

$$3)\ +c=c; \qquad 4)\ (-b)+c=c+(-b)=c-b$$

und $$5)\ c-(-b)=c+b;$$

d. h. es ist einerlei, ob man $-b \left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\ \text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$, oder ob man b selbst $\left\{\begin{matrix}\text{subtrahirt}\\ \text{addirt}\end{matrix}\right\}$.

Auch findet man leicht noch durch wiederholte Anwendung dieser Formeln

$$6)\ (-a)+(-b)=-(a+b);$$

$$7)\ -(a-b)=+(b-a)=b-a.$$

---

*) Danach ist also die Null *nicht Nichts*, sondern der Stellvertreter eines speziellen Falles der *angezeigten*, also der *gedachten* und eben deshalb der *wirklichen* Subtraktion. Nur in diesem Sinne wird die Null in der gesammten Mathematik gebraucht.

Die Zeichen (+) und (—) nennt man gewöhnlich entgegengesetzte, und die in (4.—6.) ausgesprochenen Wahrheiten drückt man gewöhnlich in folgenden Regeln aus:

I. Für das Addiren.

„1. Haben die beiden zu addirenden Ausdrücke einerlei (+ oder —) Zeichen, so addirt man die bloßen Glieder und setzt der Summe dasselbe (+ oder —) Zeichen vor; z. B. $(-p)+(-q)=-(p+q)$."

„2. Haben aber die beiden zu addirenden Ausdrücke verschiedene (+ oder —) Zeichen, so subtrahirt man nach Belieben ihre Glieder und setzt der Differenz dasjenige (+ oder —) Zeichen vor, welches ihr Minuend hatte; z. B.

$$(-a)+b=(-a)+(+b)=+(b-a)=-(a-b)."$$

II. Für das Subtrahiren.

„Jeden (additiven oder subtraktiven) Ausdruck, welcher subtrahirt werden soll, versehe man mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen und addire dann diesen neuen Ausdruck nach den vorhergehenden Regeln (I. 1. u. 2.)" *).

§. 9. Will man bei einem solchen Ausdruck wie

$$1)\quad a-b+c+d-e-f+h$$

verstanden wissen, daß er nach und nach aus seinen einzelnen Bestandtheilen so zusammengesetzt ist, wie letztere bei dem Ablesen von der Linken zur Rechten auf einander folgen, so werden Klammern, welche diese Zusammensetzung näher bezeichnen, nicht gemacht. So wie man aber dieselben Bestandtheile anders zusammensetzen will mittelst derselben Operationen, so ist das wie? durch Klammern sorgfältig anzugeben.

Der Ausdruck 1. ist jedesmal, vermöge der Formeln des §. 8., der nachstehenden Summe

$$2)\quad (+a)+(-b)+(+c)+(+d)+(-e)+(-f)+(+h)$$

gleich, und er wird deshalb algebraische Summe genannt. — In der algebraischen Summe sind lauter additive oder subtraktive Ausdrücke zu einander addirt. — Daraus folgt:

---

*) Dieser §. 8. enthält das Wesen der sogenannten „Lehre der entgegengesetzten Größen". — Jede andere Art, diese Lehre aufzufassen, ist entweder geradezu unrichtig oder doch zu einseitig, und läßt sich nicht mit Consequenz durch die gesammte Mathematik durchführen.

α) „Nach dem Grundgesetz des §. 2. oder der A. ⊙. und „B. 1. des §. 4. können in einer algebraischen Summe, z. B. in

$$a - b + c - d - e + f,$$

„die Glieder in beliebiger Ordnung geschrieben werden, wenn man „nur statt a das gleiche +a schreibt, und jedem Gliede das vor„stehende (+ oder —) Zeichen läßt; z. B.

$$-d + f + a - e + c - b = a - b + c - d - e + f.“$$

β) „Zwei algebraische Summen werden zu einander addirt, „wenn man die Glieder derselben mit ihren vorstehenden (+ oder —) „Zeichen in beliebiger Ordnung neben einander hinschreibt; (aus „§. 2.)“

γ) „Eine algebraische Summe z. B. $-m + n - p$ wird von „irgend etwas, z. B. von A subtrahirt, wenn man ihre Glie„der mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen, übrigens „in beliebiger Ordnung neben A hinschreibt, so daß man „$A + m - n + p$ erhält (aus §. 4. B. Nr. 5. und §. 8. Regel II.).“ — In den Anwendungen ist häufig A selbst wieder eine algebraische Summe.

§. 10. Da man, wie lange man auch addiren und subtrahiren mag, (nach §. 9. *β*. u. *γ*.) doch immer algebraische Summen bekommt, und da (nach §. 9. *α*.) in einer algebraischen Summe alle addirten Theile zuerst, dann aber auch alle subtrahirten Theile vereinigt werden können, so daß sie allemal die Form $A - B$ annehmen kann, — so folgt, daß, wie lange man auch (ganze) Zahlen durch Addition und Subtraktion mit einander verbinden mag, jedes Endresultat doch immer die Form $A - B$ einer Differenz zweier (ganzen) Zahlen annehmen kann.

Ist nun $A > B$, so stellt $A - B$ selbst eine (ganze) Zahl vor. — Ist $A = B$, so kann man dieses Endresultat $A - B$ durch das stellvertretende Zeichen 0 (Null, §. 7.) vorstellen lassen. — Ist aber $A < B$, so kann man (nach §. 8. Nr. 7.)

statt $A - B$ auch $-(B - A)$

schreiben, wo $B - A$ eine absolute (ganze) Zahl ist.

Das allgemeine Auffassen der Addition und Subtraktion (im §. 6.) führt also neben der absoluten (ganzen) Zahl, noch die beiden speziellen Zahlformen

0 und —z

ein, wo z eine absolute (ganze) Zahl vorstellt, während die Form —z (dieses Zeichen, welches die Differenz 0—z bezeichnet) eine negative (ganze) Zahl genannt wird. — Die (ganze) Zahl z schlechtweg, in so fern man (nach §. 8. Nr. 3.) auch +z dafür schreiben kann, wird dann, im Gegensatz der negativen, wohl auch die positive (ganze) Zahl genannt*).

In der Folge hat man also die 3 speziellen Zahlformen

+z, 0 und —z

zu betrachten, wo z eine absolute (ganze) Zahl bedeutet. Diese drei Zahlformen werden aber für den Vortrag bequemer in eine und dieselbe Form A—B d. h. in die Form der „Differenz zweier absoluten (ganzen) Zahlen" zusammengefaßt. Was dann von dieser Form A—B gelehrt wird, das gilt für positive und negative (ganze) Zahlen und für die Null zugleich.

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Zweites Kapitel.

Vom Multipliciren und Dividiren im Allgemeinen.

§. 11. Das wiederholte Addiren einer Zahl a zu sich selbst, wo a so vielmal genommen ist, als eine andere Zahl b anzeigt, führt zu einer dritten Zahl c, welche wir auch durch a·b oder a×b oder ab bezeichnen. Das Verstandes-Geschäft (die Operation), durch welches diese 3te Zahl c, aus a und b zusammengesetzt gedacht wird, und daher auch das ihm entsprechende Hinschreiben des Zeichens ab oder a·b oder a×b nennt man multipliciren (a mit b); und das Resultat ab oder a·b oder a×b (das Zeichen und nicht die damit bezeichnete Zahl)

---

*) Subtraktiv heißt also der Ausdruck —z, so lange z noch alles Mögliche sein kann; negativ dagegen, wenn z eine absolute (ganze) Zahl ist. — Eben so heißt +z ein additiver Ausdruck, so lange z selbst alles Mögliche sein kann; er wird aber positiv genannt, sobald z selbst eine absolute (ganze) Zahl ist.

heißt Produkt. — Das Produkt hat zwei Faktoren, welche anfänglich als Multiplikand und Multiplikator von einander unterschieden werden, bis der §. 12. diese Unterscheidung als überflüssig nachweist.

§. 12. Man kann auch nach und nach mehr als zwei Zahlen mit einander multipliciren und in so fern auch von „Produkten mehrerer Faktoren" sprechen. Für Produkte muß ein dem §. 2. analoger Satz bewiesen werden, nämlich:

„daß die Faktoren eines Produkts beliebig mit einander vertauscht werden können" *).

§. 13. Verfährt man genau wieder wie im §. 3. und verbindet man im §. 11. die Zahlen c und b zur Zahl a, oder die Zahlen c und a zur Zahl b, so hat man zwei, dem Multipliciren gegenüberliegende Zahlen-Verbindungen (Operationen), die aber (wegen $a \cdot b = b \cdot a$) in eine einzige zusammenfallen, welche Division genannt wird. Das Resultat der Division (der Zahl c durch die Zahl b) bezeichnet man so: $c:b$ oder $\frac{c}{b}$, und dieses Zeichen (nicht die damit bezeichnete Zahl) heißt Quotient, während c der Dividend, b dagegen der Divisor genannt wird. Das Hinschreiben des Quotienten $\frac{c}{b}$ oder $c:b$ wird ebenfalls dividiren genannt.

Der Quotient $\frac{c}{b}$ oder $c:b$ bezeichnet also die Zahl, welche mit b multiciplirt, c wieder giebt. — Dieser Quotient (das Zeichen nämlich) ist allemal das nächste Resultat des Dividirens.

---

*) Der Beweis dieses Satzes liegt in dem Schema:

. . . . .
. . . . .
. . . . .

welches dieselbe Menge von Einheiten hat, man mag sich die 5 in jeder Horizontal-Reihe, 3 mal, oder die 3 in jeder Vertikal-Reihe, 5 mal genommen denken.

§. 14. Da der Gegensatz zwischen dem Multipliciren und Dividiren, den §. §. 12. und 13. zufolge, genau derselbe ist, wie der zwischen dem Addiren und Subtrahiren (§. §. 1. 2. 3.), so spricht sich selbiger hier in ganz analogen Formeln aus, welche aus denen des §. 4. erhalten werden, wenn man jene abschreibt, aber überall multiplicirt, wo dort addirt ist, und dividirt, wo dort subtrahirt ist. Man hat also:

A. Gesetze mit 2 Elementen.

⊙) $a \cdot b = b \cdot a$; I. $\frac{a}{b} \cdot b = a$; II. $\frac{ab}{b} = a$; III. $a : \frac{a}{b} = b$.

B. Gesetze mit 3 oder mehr Elementen.

1) $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c)$ *)

2) $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$;

3) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$;

4) $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{bc}$;

5) $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}$;

6) $a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = a \cdot \frac{c}{b}$;

7) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$;

8) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$.

Außer diesen Gesetzen, welche den reinen Gegensatz zwischen dem Multipliciren und dem Dividiren aussprechen, giebt es aber auch noch Gesetze, welche den Zusammenhang zwischen den beiden

---

*) Dieses Gesetz beweist sich aus dem Schema:

a a a a a
a a a a a
a a a a a

welches dieselbe Menge von Einheiten hat, man mag sich die 5 a in jeder Horizontal-Reihe, 3 mal, oder die 3 a in jeder Vertikal-Reihe, 5 mal genommen denken.

letztern Operationen mit den beiden erstern näher angeben, nämlich diese:

9) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$;

10) $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$;

11) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$;

12) $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$;

13) $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$;

14) $a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$;

15) $\frac{a}{b} - c = \frac{a}{b} - \frac{bc}{b} = \frac{a-bc}{b}$ *).

Von diesen Gesetzen kann wieder dasselbe gesagt werden, was zu Ende des §. 4. steht. Auch sie werden zum Rechnen im Sinne des §. 5. verwandt. — Wenn daher jeder, welcher das Schreiben erlernt hat, auch multipliciren und dividiren kann (nach §. §. 11. und 13.), so kann der doch nicht (mit Produkten und Quotienten) rechnen, der die obigen Gesetze nicht hat, oder der in ihrer Anwendung nicht geübt ist.

§. 15. Diese Gesetze werden ebenfalls aus der Betrachtung der absoluten (ganzen) Zahlen abstrahirt, gelten aber wieder viel allgemeiner, weil sie wiederum Gesetze der abstrakten Operationen sind, d. h. des bloßen Gedankens. Sie können und müssen daher überall angewandt werden, wo ein Multipliciren und Dividiren gedacht d. h. angezeigt ist. — Der Begriff der Gleichung im §. 6. ist schon der allgemeinste.

---

*) Der größte Theil dieser Gesetze wird dadurch erwiesen, daß man auf jeder Seite mit einem und demselben Ausdruck multiplicirt und nachweist, wie auf jeder Seite ein und dasselbe oder gleiches (im Sinne des §. 6.) herauskommt. — Die wenigen übrigen Gesetze gehen unmittelbar aus den Definitionen hervor. — Vgl. die in der Note pag. 5. angeführten Schriften, wo diese Beweise sich vorfinden. — Besonders ist die 3te Auflage des 1sten Theils des „Systems der Mathematik“ Nürnberg 1853. zu empfehlen.

Die Gleichheit zweier durch angezeigte Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zusammengesetzten Ausdrücke A und B wird aber daran erkannt, daß, wenn sie mit einem dritten Ausdruck C multiplicirt werden, die Produkte A·C und B·C in einen und denselben Ausdruck übergehen, sobald man $\frac{a}{b}\cdot b$ jedesmal mit a vertauscht, und noch die Eigenschaften der Produkte berücksichtigt, — oder daß sie durch dieselbe Multiplikation in Ausdrücke übergehen, welche nur noch durch Addition und Subtraktion zusammengesetzt und in dem Sinne des §. 6. einander gleich sind.

Zwei Ausdrücke, die in diesem allgemeinsten Sinne einander gleich sind, sind es dann auch allemal, sobald sie Differenzen ganzer Zahlen werden; und dieselben sind dann auch immer im Sinne der Einleitung Nr. 5. einander gleich, d. h. sie bezeichnen beide eine und dieselbe (ganze) Zahl, so oft sie wirklich Zahlen bedeuten.

Schon die analoge Behauptung des §. 6. muß sorgfältig erwiesen werden. Der Beweis des so eben Gesagten ist dagegen noch schwieriger. Die Behauptung des §. 6. konnte nämlich in ihrer Anwendung nur mit der absoluten (ganzen) Zahl in Widerspruch gerathen, weil man dazumal noch nichts anderes hatte. Die jetzige Behauptung kann in ihrer Anwendung, wenn sie nicht wahr sein sollte, mit dem in Widerspruch gerathen, was für die positiven und negativen ganzen Zahlen und für die Null, d. h. (nach §. 10.) für die Differenz zweier absoluten (ganzen) Zahlen feststeht.

Um daher den Beweis der gegenwärtigen Behauptung zu führen, sieht man sich gezwungen, zuvor die Definition des Produkts a·b für den Fall zu erweitern, daß a und b Differenzen ganzer Zahlen sind, nämlich daß $a=\alpha-\beta$ und $b=\gamma-\delta$ ist, wo $\alpha \gtreqless \beta$, und eben so $\gamma \lesseqgtr \delta$ sein kann. Diese Definition wird aus einem, oder, wenn es nöthig erscheint, höchstens aus zweien der Gesetze des §. 14. selbst hergeholt, z. B. aus $(\alpha-\beta)\cdot\gamma=\alpha\gamma-\beta\gamma$ und $\alpha.(\gamma-\delta)=\alpha\gamma-\alpha\delta$. — Da der Quotient dem Produkt gegenüberliegt, so kann man die im §. 13. gegebene Definition des Quotienten beibehalten, um mit dem erweiterten Begriff des Produkts auch zugleich einen zugehörig erweiterten Begriff des Quotienten zu haben.

Steht aber der Begriff des Produkts a·b und des Quotienten $\frac{a}{b}$

fest für den Fall, daß a und b solche Differenzen zweier ganzen Zahlen sind, — so muß nun untersucht werden, ob alle übrigen Gesetze des §. 14. für diese erweiterten Begriffe des Produkts und des Quotienten noch wahr sind. Wenn keines dieser Gesetze bei dieser Prüfung einen Widerspruch enthält, — dann erst kann man sie alle als allgemeine Gesetze des Operirens beibehalten, und sie anwenden, wo nur immer ein Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren angezeigt d. h. gedacht ist, ohne daß man sich weiter um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern hätte*).

§. 16. Diese Untersuchung und namentlich die Frage, ob, wenn a und b Differenzen ganzer Zahlen sind, es allemal eine einzige Differenz c ganzer Zahlen so gebe, daß $a = b \cdot c$ ist, zeigt, daß der Begriff $\frac{a}{b}$ aufhört ein eindeutiger zu sein, wenn $a = b = 0$ (Null) werden sollte**). — Deshalb muß man die praktische Regel feststellen:

„Man wende die Gesetze der §. §. 4. und 14. unbedingt „und ohne alle weitere Vorsicht an; man dividire nur nie „durch Null; also, wo bereits durch irgend einen allgemeinen „Ausdruck dividirt ist, da mache man zur stillschweigenden Bedingung, daß solcher nie Null sein könne und dürfe; d. h. wenn „irgend einer der allgemeinen Divisoren in einem Ausdruck, bei „irgend einer Anwendung Null werden sollte, da wende „man denselben allgemeinen Ausdruck nicht länger „mehr an, sondern behandle diesen besonderen Fall „von vorn herein besonders."

§. 17. Wenden wir diese Gesetze der §. §. 4. und 14. nun zunächst auf die Differenzen 0 und $-b$ und auf die Summe $+b$ an, welche bezüglich Null und subtraktive oder additive Ausdrücke heißen. Man findet dann die Fortsetzung der speziellen Gesetze der §. §. 7. 8., nämlich

---

*) Man muß darüber, um völlig befriedigt zu werden, die oben (pag. 5.) angeführten größeren Werke nachlesen.

**) Man beweist nämlich, daß $A = B$ ist, gewöhnlich dadurch, daß man auf beiden Seiten mit C multiplicirt, und, wenn dann $A \cdot C = B \cdot C$ gefunden wird, daraus schließt, daß auch $A = B$ gewesen sein müsse. Dieser Schluß ist aber nur zulässig, wenn C nicht Null ist, wie eben die Untersuchung lehrt.

8) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$; 9) $\frac{0}{a} = 0$;

10) $(-a) \cdot b = b \cdot (-a) = -ab$;

11) $(-a) \cdot (-b) = +ab$;

12) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$; 13) $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$ *).

Die Resultate 10.—13. sucht man durch nachstehende, im Lapidarstyl ausgesprochene praktische Regel im Gedächtniß fest zu halten, nämlich: Einerlei (+ oder —) Zeichen mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, geben plus (+); verschiedene dagegen minus (—).

§. 18. Für das Multipliciren der algebraischen Summen ergiebt sich nun sogleich folgende Regel:

„Zwei algebraische Summen werden mit einander multiplicirt, wenn man jeden Summanden der einen, mit jedem Summanden der andern multiplicirt, dabei die vorstehende praktische Regel des §. 17. wegen der Vorzeichen anwendet, zuletzt aber alle diese additiven und subtraktiven Ausdrücke addirt, d. h. neben einander hinschreibt" **).

Denn man denkt sich algebraische Summen (nach §. 9.) wie gewöhnliche Summen geschrieben, wendet dann das Gesetz §. 14. Nr. 9. wiederholt an, und sieht sich dabei gezwungen, die Formeln §. 17. Nr. 10. 11. eintreten zu lassen.

§. 19. Die Formel §. 14. Nr. 11. wiederholt angewandt, giebt die Regel, wie man Summen, also auch algebraische Summen, durch irgend einen Ausdruck $+m$ oder $-m$ dividirt. Man erhält z. B.

---

*) Diese Formel 13., so wie noch den 2ten Theil der 12. muß man indirekt sich verschaffen. Ihre Richtigkeit erkennt man aber leicht daran, daß man auf beiden Seiten mit $-b$ multiplicirt, und die Resultate als gleiche erkennt.

**) Man muß nur nicht übersehen, daß hier viel mehr geschehen ist, als verlangt wurde. Multiplicirt sind die beiden algebraischen Summen bereits, sobald man sie, jede in Klammern eingeschlossen, neben einander hin geschrieben und das Multiplikations-Zeichen dazwischen gesetzt hat. Hier aber hat man dieses Produkt, als Resultat der Multiplikation, bereits für weitere praktische Zwecke wiederum in eine ihm gleiche algebraische Summe umgeformt.

$$\frac{a-b+c-d-e+f}{-m} = -\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}+\frac{e}{m}-\frac{f}{m};$$

d. h. man dividirt jedes Glied, und wendet hinsichtlich der Vorzeichen die praktische Regel des §. 17. an.

§. 20. Sollen aber zwei algebraische Summen nicht bloß durch einander dividirt werden, was im Hinschreiben des Quotienten (der angezeigten Division) besteht, sondern soll dieser Quotient auch sogleich wieder in eine algebraische Summe umgeformt erscheinen, so reichen die bisher gegebenen Gesetze der Operationen nicht aus, und man muß folgendes neue Gesetz zu denen des §. 14. hinzufügen, nämlich

$$16)\ \frac{A}{B} = x + \frac{A-Bx}{B},$$

ein Gesetz, dessen Richtigkeit erkannt wird, sobald man auf beiden Seiten mit B multiplicirt.

„Jeden Quotienten $\frac{A}{B}$ (also auch den Quotienten, welcher aus der Division zweier algebraischen Summen im Sinne des §. 13. entsteht) kann man danach in eine Summe zweier Summanden verwandeln, wenn man den ersten Summanden $\frac{A-B\cdot x}{B}$ dadurch dazu findet, daß man den ersten Summanden x mit dem Divisor B multiplicirt, das Produkt $B\cdot x$ von dem Dividenden A subtrahirt, die Differenz $A-B\cdot x$ dagegen wiederum durch B dividirt."

§. 21. Da der zweite Summand $\frac{A-B\cdot x}{B}$ in der Regel selbst wieder ein Quotient ist, so kann man ihn mittelst desselben Gesetzes auf's Neue in eine Summe von 2 Summanden verwandeln, so daß dann erst der gegebene Quotient $\frac{A}{B}$ in eine Summe von 3 Summanden umgeformt ist. Durch wiederholte Anwendung desselben Gesetzes (16.) kann man also einen Quotienten $\frac{A}{B}$ in eine Summe von beliebig viel, ja von unendlich viel Sum-

manden verwandeln, welche letztere eine unendliche Reihe genannt wird.

§. 22. Und weil der erstere Summand allemal ganz willkührlich genommen werden kann, so wird man in der Anwendung des Gesetzes 16. des §. 20. diesen erstern Summanden allemal noch irgend einem gegebenen Zwecke gemäß wählen können und namentlich auch so, daß der zweite Summand $\frac{A - B \cdot x}{B}$ im Dividenden $A - B \cdot x$ möglichst einfach werde, weil dann die Hoffnung Wurzel fassen kann, daß bei fortgesetztem Verfahren, der allemal noch entstehende Quotient (als jedesmaliger letzter Summand) immer einfacher und einfacher und zuletzt entweder der Null gleich, oder doch unter allen möglichen der einfachste werde.

Dem mechanischen Ausführen giebt man dann eine praktische Form.

Danach erhält man z. B.

$$\frac{am - an + ap - bm - bp + bn}{-a + b} = -m + \frac{-an + ap - bp + bn}{-a + b}$$

$$= -m + n + \frac{ap - bp}{-a + b} = -m + n - p + \frac{0}{-a + b} = -m + n - p.$$

Ferner

$$\frac{1}{1+b} = 1 - \frac{b}{1+b} = 1 - b + \frac{bb}{1+b} = 1 - b + bb - \frac{bbb}{1+b}$$

$$= 1 - b + bb - bbb + bbbb - bbbbb + \ldots\ldots \text{ in infinit.},$$

wenn man nur, sobald man abbricht, das allerletzte (Ergänzungs-) Glied gehörig dazu bestimmt*).

Anmerkung. Gehen wir nun zu den besonderen Betrachtungen über, welche sich an diese allgemeinen Untersuchungen über das Multipliciren und Dividiren noch anschließen.

§. 23. Da der (wirkliche) Quotient nichts als die gedachte, mithin die angezeigte Division ist, so wird man (in den Anwendungen) auf Quotienten wie $\frac{a}{b}$ stoßen, deren Dividenden und Divisoren absolute (ganze) Zahlen sind, ohne daß sie

*) Sollte in den Anwendungen, wenn man bis zum n^{ten} Gliede fortgeht, dieses noch zugehörige $(n+1)^{ste}$ Glied für die Rechnung als unbedeutend außer Acht gelassen werden können, so braucht man sich natürlich in diesem Falle zu dessen Auffindung keine Mühe zu geben.

selbst einer (ganzen) Zahl gleich wären. Solche angezeigte Divisionen von dieser speziellen Gattung nennt man **Brüche** oder **gebrochene Zahlen**, und die Zahlen selbst, von deren Betrachtung wir ausgegangen sind, werden dann, im Gegensatz der so eben erwähnten **Zahlformen**, auch **ganze Zahlen** genannt*). — Den Dividenden a, in dem Bruche $\frac{a}{b}$ (ausgesprochen a b^{tel}) nennt man auch seinen **Zähler**, den Divisor b dann seinen **Nenner**. Der Bruch heißt ein **ächter**, wenn (nach Einl. Nr. 6) $a < b$ ist; außerdem ein **unächter**.

Die Summe $a + \frac{b}{c}$, oder $4\frac{2}{3}$ $\left(\text{statt } 4 + \frac{2}{3}\right)$, aus einer ganzen Zahl a und einem ächten Bruche $\frac{b}{c}$, wird eine **gemischte Zahl** genannt.

§. 24. Weil sonach der Bruch nichts anders als ein Quotient ist, d. h. eine angezeigte Division, so kann und muß man mit ihm nicht anders als nach den Gesetzen des §. 14. und §. 20. rechnen.

Namentlich lehren die Formeln des §. 14. Nr. Nr. 11. und 12., wenn man von der Rechten zur Linken geht, wie zwei Brüche addirt und subtrahirt werden, wenn sie einerlei Nenner haben. — Die Formel (ebend.) Nr. 13. lehrt, wie „die ganze Zahl unter den Bruch gebracht," d. h. wie eine gemischte Zahl in einen Bruch verwandelt wird. — Die Formel §. 20. Nr. 16. muß man anwenden, wenn „aus einem (unächten) Bruche die Ganzen herausgeholt werden sollen," d. h. wenn ein (unächter) Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln ist. — Die Formeln §. 14. Nr. Nr. 3. und 4. lehren, wie man einen Bruch $\frac{a}{b}$ mit einer ganzen Zahl c multiplicirt und durch eine ganze Zahl c dividirt. —

---

*) Diese hier so eben definirte gebrochene Zahl ist die **unbenannte**, mit welcher allein es die **Rechnung** zu thun hat. Später werden wir auch die gebrochene **benannte** Zahl kennen lernen, und sie wird als ein **Theil** der ganzen Einheit erscheinen. Mit letzterer kann man aber **nie** rechnen (nach §. 5.). —

Die Formel Nr. 6. (ebend.) zeigt, wie eine ganze Zahl a durch einen Bruch $\frac{b}{c}$ dividirt wird. — Die Formeln Nr. 7. (ebend.) lehren, wie zwei Brüche mit einander multiplicirt und durch einander dividirt werden*); während die Formel 8. das erkennen läßt, was wir als besonders wichtig hervorheben, nämlich:

I. „Daß ein Bruch $\frac{a}{b}$ seinem Werthe nach unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl c multiplicirt, oder beide durch eine und dieselbe Zahl c dividirt," d. h. daß der neue Bruch statt des alten unbedingt gesetzt werden kann.

II. Um gegebene Brüche

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{e}{f}, \quad \text{etc.}$$

„unter einerlei Benennung zu bringen", d. h. in andere bezüglich gleiche Brüche zu verwandeln, welche alle einen und denselben Nenner haben, — nimmt man eine beliebige Zahl N zum gemeinschaftlichen Nenner (welcher auch der General-Nenner genannt wird), dividirt solchen durch jeden einzelnen der Nenner b, d, f, etc., so daß man die Resultate

$$\frac{N}{b}, \quad \frac{N}{d}, \quad \frac{N}{f}, \quad \text{etc.}$$

erhält, welche wir bezüglich durch

$$\beta, \quad \delta, \quad \zeta, \quad \text{etc.}$$

bezeichnen wollen (also daß

$$(♂) \ldots \quad N = b\beta, \quad N = d\delta, \quad N = f\zeta, \quad \text{etc.}$$

ist), und multiplicirt damit bezüglich Zähler und Nenner des

*) Wir machen noch einmal darauf aufmerksam, daß das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren im bloßen Hinschreiben der Summe, der Differenz, des Produkts oder des Quotienten besteht, was man häufig das bloße Anzeigen nennt; daß wir aber hier jedesmal schon weiter gehen, mehr thun, als verlangt wird, und die unmittelbar erhaltenen Resultate zugleich noch umformen, also (nach §. 5.) rechnen. — Meist will man hier selber wieder die Form eines Bruches als Endresultat erhalten.

zugehörigen der gegebenen Brüche. — Dadurch erhält man aber statt der gegebenen Brüche:

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{e}{f}, \quad \text{etc.},$$

diese andern

$$\frac{a\beta}{b\beta}, \quad \frac{c\delta}{d\delta}, \quad \frac{e\zeta}{f\zeta}, \quad \text{etc.},$$

welche nach I. bezüglich den gegebenen Brüchen gleich sind, welche aber nach den vorstehenden Gleichungen (♂) alle denselben Nenner $b\beta = d\delta = f\zeta = \text{etc.} = N$ haben.

In den Anwendungen wählt man zum General-Nenner eine solche Zahl N, daß β, δ, ζ, etc. ganze Zahlen werden, oder „daß N durch jeden der Nenner b, d, f, etc. ohne Rest theilbar ist." — Eine solche Zahl N nennt man ein Vielfaches der Zahlen b, d, f, etc.; und man wählt unter allen diesen Vielfachen in der Regel das kleinste zum General-Nenner aus. — Wie solches gefunden wird, mag später (im 5^ten^ Kapitel) gelehrt werden. — Das Produkt $b \cdot d \cdot f \cdots$ aller Nenner ist gewiß immer ein Vielfaches derselben, aber nicht immer gerade das kleinste.

III. Da man Brüche addiren und subtrahiren kann, zu und von einander, welche einerlei Nenner haben, so kann man nun mittelst der vorstehenden II. auch Brüche zu einander addiren, oder zum Theil addiren, zum Theil subtrahiren, welche verschiedene Nenner haben.

Und kommen unter den zu addirenden oder zu subtrahirenden Theilen, außer Brüchen auch noch ganze Zahlen vor, z. B. z, so muß man solche (nach §. 14. A. II.) auf die Form des Quotienten $\frac{z.N}{N}$ bringen, welcher denselben Divisor (General-Nenner) N hat, und man behandelt dann alles genau nach den Formeln §. 14. Nr. Nr. 11. und 12., welche überhaupt lehren, wie man Quotienten, die einerlei Divisor haben, addirt und subtrahirt (diese Worte jetzt im praktischen Sinne genommen, wo sogleich umgeformt, also mehr gethan wird, als wörtlich verlangt ist).

Da ferner (nach §. 23.) gemischte Zahlen z. B. $2\frac{3}{4}$, $5\frac{7}{8}$

nichts anders als Summen sind $\left(2+\frac{3}{4}, \text{ oder } 5+\frac{7}{8}\right)$, so kann man nur nach den Gesetzen der Summen mit ihnen rechnen, wenn man sie nicht lieber sogleich in (unächte) Brüche verwandeln, also $\frac{11}{4}$ statt $2\frac{3}{4}$, und $\frac{47}{8}$ statt $5\frac{7}{8}$ schreiben will, in welchem letztern Falle dann sogleich die Gesetze der Quotienten (Brüche) eintreten.

§. 25. Um das Auffinden aller solchen, durch das allgemeine Auffassen der Operationen erscheinenden speziellen Zahlformen, zu denen z. B. der Bruch gehört, nicht dem Zufall zu überlassen, wiederholen wir die allgemeine Betrachtung des §. 10., auf unserm gegenwärtigen Standpunkte. Wir finden aber aus der Betrachtung der Gesetze der §. §. 4., 14., 20.,

„daß, wenn man eine beliebige Anzahl absoluter ganzer Zahlen (von denen wir ausgegangen sind) auf eine beliebige Weise mittelst der bis jetzt betrachteten 4 Operationen mit einander verbindet, alle Endresultate doch immer umgeformt werden können, entweder in Differenzen zweier ganzen Zahlen (also in eine positive ganze, negative ganze Zahl oder in die Null), oder doch in einen Quotienten aus zweien solchen Differenzen ganzer Zahlen, und dieser (da nie durch Null dividirt werden kann) nimmt (nach §. 17. Nr. Nr. 12. und 13.) allemal eine der 3 Formen $+\frac{\alpha}{\beta}$, $-\frac{\alpha}{\beta}$ oder 0 (Null) an, wo $\frac{\alpha}{\beta}$ eine gebrochene Zahl ist (die also nicht zugleich eine ganze Zahl sein kann). — Diese Formen $+\frac{\alpha}{\beta}$ und $-\frac{\alpha}{\beta}$ nennen wir positive und negative gebrochene Zahlen."

„Alle speziellen Zahlformen, welche außer den absoluten (ganzen) Zahlen durch das allgemeine Auffassen der 4 Operationen eingehen, sind daher positive ganze oder gebrochene, negative ganze oder gebrochene Zahlen, oder die Null. — Diese 5 verschiedenen speziellen Zahlformen fassen wir unter dem Namen

der reellen Zahlen zusammen*). — Wenn man aber die negativen ausschließt, so heißen die übrigen auch die absoluten Zahlen. Eine absolute Zahl ist also eine positive ganze oder gebrochene Zahl oder Null. — In den Anwendungen und so lange man nur diese 4 Operationen gebraucht, können nie andere als solche reelle Zahlen erscheinen (d. h. alle zusammengesetzteren Ausdrücke müssen sich nothwendig allemal auf eine dieser 5 einfachen Formen zurückführen lassen)."

§. 26. Betrachten wir nun diese reellen Zahlen noch etwas näher. — Sind a und b zwei solche reelle Zahlen, so ist a—b entweder der Null, oder einer positiven Zahl oder einer negativen Zahl gleich. Ist aber a—b einer positiven Zahl gleich, so ist b—a zu gleicher Zeit einer negativen Zahl gleich, und man drückt dasselbe auch dadurch aus, daß man sagt, „a wäre größer als b" oder „b wäre kleiner als a", oder dadurch, daß man $a > b$ oder $b < a$ schreibt**).

Aus diesem Begriff des Größern und Kleinern geht sogleich hervor:

1) Gleiches zu Größerem addirt oder von Größerem subtrahirt giebt das Größere; d. h. ist $a > b$, so ist auch

$$a + c > b + c \text{ und } a - c > b - c,$$

es mag c positiv, negativ oder Null sein.

2) Das Größere vom Gleichen subtrahirt, läßt das Kleinere übrig; d. h. ist $a > b$, so ist $c - a < c - b$, es mag c positiv, negativ oder Null sein.

3) Das Größere mit dem Gleichen $c = c$ multiplicirt oder dividirt, giebt das Größere, wenn c positiv ist, dagegen das

---

*) Diese reellen Zahlen sind also nichts weiter, um den Anfänger noch einmal darauf aufmerksam zu machen, als angezeigte Operationen; aber gerade deshalb kann, dem Begriff des §. 5. zufolge, mit denselben gerechnet werden.

**) Bei diesen, hier für reelle Zahlen gegebenen Definitionen vom Größern und Kleinern ist besonders zu beachten, daß wir dabei den Begriff der Größe durchaus nicht voraussetzen, sondern diese Worte „größer", „kleiner" hier nur gebrauchen, um gewisse Zustände derjenigen angezeigten Operationen, welche wir reelle Zahlen nannten, auszudrücken.

Kleinere, wenn c negativ ist; d. h. ist $a > b$, so ist $a \cdot c > b \cdot c$ und $\frac{a}{b} > \frac{b}{c}$, wenn c positiv, dagegen ist zu gleicher Zeit $a \cdot c < b \cdot c$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, wenn c negativ sein sollte.

4) Ist $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.

Anmerkung. Uebrigens erhellet noch aus der vorstehenden Definition des Größern und Kleinern in Bezug auf reelle Zahlen:

1) Jede positive Zahl ist größer als die Null, und auch größer als jede negative Zahl.

2) Von zweien negativen Zahlen ist diejenige die größere, welche das kleinere absolute Glied hat; d. h. es ist $-a > -b$, so oft $a < b$ ist.

3) Unter den absoluten (nicht negativen) Zahlen ist die Null die kleinste.

4) Von zweien (absoluten oder positiven) gebrochenen Zahlen ist diejenige die kleinste, welche bei einerlei Nenner den kleinern Zähler, oder bei einerlei Zähler den größern Nenner hat.

5) Jeder ächte Bruch ist kleiner als 1; jeder unächte Bruch ist > 1.

§. 26ª. Anhang.

Von den Verhältnissen und Proportionen *).

I. Einen Quotienten $\frac{a}{b}$ aus zweien Zahlen nennt man auch das Verhältniß von a zu b. — Man gebraucht dabei lieber das andere Divisions-Zeichen und schreibt $a : b$, und nennt dann a das Vorder-Glied, b hingegen das Hinter-Glied.

II. Eine Gleichung zwischen zwei Quotienten, z. B.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

*) Obgleich jetzt eine eigene Lehre der Proportionen als veraltet angesehen werden kann, so mögen hier doch die wichtigsten Resultate derselben Platz finden.

nennt man eine Proportion, und schreibt solche lieber so:

$$a:b=c:d.$$

Die Zahl d heißt dann die 4te Proportional-Zahl zu a, b, c. — Ist b=c, also a:b=b:d, so heißt die Proportion eine stetige, und d nennt man dann die dritte Proportional-Zahl zu a und b; während gleichzeitig b die mittlere Proportional-Zahl zwischen a und d genannt wird.

III. Ist eine solche Proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad a:b=c:d$$

gegeben, so kann man auf jeder Seite der Gleichung mit den Nennern b und d, oder mit dem Produkt bd multipliciren, und man erhält

$$a \cdot d=b \cdot c,$$

d. h. „das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem Produkte der mittlern Glieder."

Dividirt man jede Seite dieser Gleichung durch a, b, c oder d, so erhält man noch

$$d=\frac{bc}{a}; \quad \frac{ad}{b}=c; \quad \frac{ad}{c}=b; \quad a=\frac{bc}{d};$$

so daß jedes der 4 Glieder gefunden ist, sobald die 3 übrigen gegeben sind.

IV. Umgekehrt: Hat man eine Gleichung zwischen 2 Produkten

$$p \cdot q=r \cdot s,$$

so kann man solche in Form einer Proportion schreiben, wenn man p und q beide zu äußern oder beide zu mittleren Gliedern macht, so daß man erhält

$$p:r=s:q, \text{ oder } p:s=r:q,$$

oder $$q:r=s:p, \text{ oder } q:s=r:p,$$

oder $$r:p=q:s, \text{ oder } r:q=p:s,$$

oder $$s:p=q:r, \text{ oder } s:q=p:r.$$

Alle diese Gleichungen finden zu gleicher Zeit statt, sobald eine von ihnen statt findet.

V. Sind mehrere Verhältnisse (Quotienten, Brüche) einander gleich, z. B.

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}=\frac{d}{\delta}=\text{etc. etc.};$$

und verbindet man die Zähler (Vorder-Glieder) a, b, c, d, etc. etc. auf eine beliebige Weise, aber durch Addition und Subtraktion mit einander; dann aber auch die zugehörigen Nenner (Hinter-Glieder) α, β, γ, δ, etc. etc., genau auf dieselbe Weise mit einander, so hat man ein neues Verhältniß (Quotienten, Bruch), welches den gegebenen gleichen Verhältnissen wiederum gleich ist. — So hat man z. B. unter der vorstehenden Voraussetzung

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}=\frac{d}{\delta}=\frac{a-b}{\alpha-\beta}=\frac{a+b}{\alpha+\beta}=\frac{a-b+c}{\alpha-\beta+\gamma}$$
$$=\frac{pa+qb-rc}{p\alpha+q\beta-r\gamma}=\frac{a+b+c+d}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{pa+qb+rc+sd}{p\alpha+q\beta+r\gamma+s\delta}$$
$=$ u. s. w. f.

Denn da alle Brüche $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, $\frac{d}{\delta}$, etc. einander gleich sind, so sind sie alle einem einzigen $\frac{x}{z}$ gleich, aus welchem sie dadurch hervorgehen, daß man Zähler und Nenner von $\frac{x}{z}$ mit einer und derselben Zahl multiplicirt. Daher hat man

$$a=gx,\quad b=hx,\quad c=mx,\quad d=nx,\quad \text{etc. etc.};$$

aber dann nothwendig auch

$$\alpha=gz,\quad \beta=hz,\quad \gamma=mz,\quad \delta=nz,\quad \text{etc. etc.}$$

Danach ist nun auch

$$pa+qb+rc+sd=(pg+qh+rm+sn).x$$

und

$$p\alpha+q\beta+r\gamma+s\delta=(pg+qh+rm+sn).z;$$

und so findet sich, daß der letztere der obigen Brüche wiederum $=\frac{x}{z}$ ist. — Ebenso findet sich aber jeder der übrigen Brüche auch $=\frac{x}{z}$.

VI. Es versteht sich von selber, daß wenn man zwei solche Proportionen gegeben hat, z. B.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{und} \quad \frac{m}{n}=\frac{p}{q},$$

daß man dann diese beiden Gleichungen links und rechts mit einander multipliciren oder durch einander dividiren darf, daß man also aus den beiden Gleichungen (Proportionen)

$$a:b=c:d$$

und

$$m:n=p:q,$$

noch diese neuen Gleichungen (Proportionen)

$$a \cdot m : b \cdot n = c \cdot p : d \cdot q$$

oder

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$$

erhält *).

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen im Allgemeinen.

§. 27. Das wiederholte Multipliciren einer Zahl a mit sich selbst, wo a so viel mal vorhanden ist, als eine andere ganze Zahl b anzeigt, führt zu einer dritten Zahl c, welche auch durch das Zeichen a^b bezeichnet wird. Dieses Zeichen a^b nennt man Potenz; a heißt dabei der Dignand, b der Exponent dieser Potenz. Diese Potenz a^b hinschreiben, heißt potenziren (a mit b).

Die 2te Potenz von a, nämlich a^2, nennt man insbesondere auch das Quadrat von a; sie bilden, heißt quadriren. — Eben so heißt die 3te Potenz von a, nämlich a^3, häufig auch der Kubus oder der Würfel von a, und sie hervorbringen, nennt man wohl auch kubiren.

§. 28. Verfährt man genau wieder wie in den §. §. 3. und 13. und verbindet man im §. 27. die dritte Zahl c und die zweite b zur ersten a, so hat man eine, dem Potenziren gegenüber liegende indirekte Zahlen-Verbindung (Operation), welche man die Radikation oder das Wurzeln (Wurzel-Ausziehen) nennt. Das Resultat der Radikation bezeichnet man so: $\sqrt[b]{c}$, und in selbigem heißt c der Radikand, d der Wurzel-Exponent. — Die Wurzel $\sqrt[b]{c}$ bezeichnet also diejenige Zahl a, welche, wenn sie mit b potenzirt wird, die Zahl c wieder giebt. — Die Wurzel $\sqrt[b]{c}$ (das Zeichen) hinschreiben, nennen wir ebenfalls schon radiciren (c durch b), oder Wurzel ausziehen (die bte aus c).

---

*) Das Weitere siehe in der Note zu pag. 30.

Die 2te Wurzel aus a, nämlich $\sqrt[2]{a}$, schreibt man meist bloß so, nämlich $\sqrt{a}$, denkt sich den Wurzel-Exponenten 2 noch hinzu und nennt sie Quadrat-Wurzel. — Die 3te Wurzel aus a, nämlich $\sqrt[3]{a}$, wird auch häufig Kubik-Wurzel genannt.

§. 29. Verbindet man dagegen weiter, den §. §. 3. und 13. analog, im §. 27. die dritte Zahl c und die erste a mit einander, um rückwärts die dortige zweite Zahl b zu erhalten, so hat man die zweite der dem Potenziren gegenüber liegenden Zahlen-Verbindungen (Operationen), welche wir das Logarithmiren nennen. Das Resultat der Logarithmation (der Zahl c durch die Zahl a) bezeichnen wir so: $\overset{a}{log}$ c; dieses Zeichen $\overset{a}{log}$ c nennen wir Logarithme, und sprechen es aus: „der Logarithme von c für die Basis a." — Dabei heißt c der Logarithmand (auch numerus), a dagegen die Basis.

Der Logarithme $\overset{a}{log}$ c bezeichnet also diejenige Zahl b (nicht, welche mit, sondern) mit welcher die Zahl a potenzirt werden muß, um c wieder zu geben. Den Logarithmen $\overset{a}{log}$ c hinschreiben, heißt auch schon „logarithmiren."

Ist also $2^3 = 8$, so ist $\sqrt[3]{8} = 2$, dagegen $\overset{2}{log}\ 8 = 3$; und ist $10^4 = 10000$, so ist $\sqrt[4]{10000} = 10$, dagegen $\overset{10}{log}\ 10000 = 4$.

Anmerkung. Die beiden indirekten Operationen, welche jeder direkten entgegengesetzt sind, fallen dasmal nicht, wie im §. 3. und im §. 13., in eine einzige zusammen, weil zwar $a + b = b + a$, und $a \cdot b = b \cdot a$ ist, aber nicht $a^b = b^a$, d. h. weil in der Potenz a^b ihre beiden Elemente a und b nicht mit einander vertauscht werden können. Radiciren und Logarithmiren bilden daher mit dem Potenziren einen Gegensatz in Triplo.

Da übrigens das ganz allgemeine und möglichst gründliche Auffassen dieses Gegensatzes und der Beziehungen, in denen diese letztern 3 Operationen (Potenziren, Radiciren und Logarithmiren) zu den frühern Operationen stehen, nicht mehr Gegenstand der Elemente ist, so werden wir zwar den Gang der beiden vorhergehenden Kapitel auch hier noch verfolgen, aber statt der

vielen und aller Resultate, welche er geben muß, nur diejenigen herausheben, welche zur Elementar-Analysis gerechnet werden und welche zugleich für die nächsten Anwendungen am unentbehrlichsten sind.

§. 30. Wir stellen zunächst folgende Gesetze der Potenzen hin, nämlich

1) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$; 2) $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$;

3) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;

5) $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$.

Diese Gesetze lehren, wie man bei dem praktischen Rechnen eine Zahl a mit einer Summe $m+n$, oder mit einer Differenz $m-n$, oder mit einem Produkt mn potenzirt; — wie man ein Produkt ab, oder einen Quotienten $\frac{a}{b}$, oder eine Potenz a^n mit einer Zahl m potenzirt; — endlich wie man zwei Potenzen mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, und zwar wenn sie einerlei Exponenten, oder einerlei Dignanden haben.

Auch diese Gesetze werden unmittelbar aus dem Begriff der Potenz, wie er sich unter der Voraussetzung des Daseins absoluter ganzer Zahlen gestaltet, hergeholt und erwiesen.

§. 31. Als Gesetze, in welche Wurzeln eingehen, heben wir heraus:

A. Gesetze mit 2 Elementen.

I. $\left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a$; II. $\sqrt[b]{(a^b)} = a$.*)

B. Gesetze mit 3 und mehr Elementen.

1) $\sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$; 2) $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$;

3) $\sqrt[m]{(a^n)} = a^{\frac{n}{m}}$; 4) $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$;

5) $\sqrt[m\alpha]{(a^{n\alpha})} = \sqrt[m]{(a^n)} = \sqrt[m:\alpha]{(a^{n:\alpha})}$;

---

*) Das Gesetz III. im §. 4. A. und §. 14. A. geht hier in das logarithmische Gesetz III. des §. 32. über.

$$6)\ a.\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m \cdot b};\quad 7)\ \frac{\sqrt[m]{b}}{a} = \sqrt[m]{\left(\frac{b}{a^m}\right)};$$

$$8)\ \frac{a}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a^m}{b}\right)}.$$

Diese Gesetze werden dadurch erwiesen, daß man jede Seite dieser Gleichungen mit einem oder dem andern der Wurzel-Exponenten potenzirt, und sich dabei überzeugt, daß auf jeder Seite ein und dasselbe herauskommt. (Vgl. §. 4. und §. 14.) — Für Quadrat-Wurzeln sehen die 3 erstern noch so aus:

$$1')\ \sqrt{(ab)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};\quad 2')\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};\quad 3')\ \sqrt{(a^n)} = a^{\frac{n}{2}}.$$

Und die 6. 7. und 8. sehen für Quadrat- und Kubik-Wurzeln so aus:

$$4')\ a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b};\quad 5')\ a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b};\quad 6')\ \frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{b}{a^2}};$$

$$7')\ \frac{\sqrt[3]{b}}{a} = \sqrt[3]{\frac{b}{a^3}};\quad 8')\ \frac{a}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}};\quad 9')\ \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{b}}.$$

Diese Gesetze zeigen, wie man im Praktischen aus einem Produkt, Quotienten, aus einer Potenz oder Wurzel, die Wurzel zieht; — wie man eine Zahl a mit einem Quotienten potenzirt, oder mit einem Produkt radicirt; — endlich wie Wurzeln, welche einerlei Wurzel-Exponenten haben, mit einander multiplicirt, oder durch einander dividirt werden. Die Formel 5. kann noch überdies dazu benutzt werden, „Wurzeln unter einerlei Wurzel-Exponenten zu bringen." — Die Gesetze 6. 7. und 8. lehren, wie man Wurzeln und einfache Ausdrücke mit einander multiplicirt, und durch einander dividirt.*)

§. 32. Unter den Gesetzen endlich, welche Logarithmen enthalten, heben wir hervor:

A. Gesetze mit 2 Elementen.

$$\text{I. } b^{\left(\overset{b}{log}\, a\right)} = a;\qquad \text{II. } \overset{b}{log}\,(b^a) = a.$$

---

*) Zu der Lehre der Proportionen pag. 27. kann nun auch noch hinzukommen: Ist gegeben $a:b = c:d$, so hat man auch sogleich noch

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2;\qquad a^3 : b^3 = c^3 : d^3;$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d};\quad \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d};$$ u. s. w. f.

B. Gesetze mit 3 Elementen.

$$1)\ log\ (ab) = log\,a + log\,b;$$

$$2)\ log\left(\frac{a}{b}\right) = log\,a - log\,b;$$

$$3)\ log\ (a^b) = b \cdot log\,a;$$

$$4)\ log\ (\sqrt[b]{a}) = \frac{log\,a}{b};$$

$$5)\ \overset{c}{log}\ a = \overset{b}{log}\,a \cdot \overset{c}{log}\,b.$$

In den erstern 4 dieser Gesetze B. ist die Basis der Logarithmen nicht hingeschrieben worden, weil diese Formeln gelten, so oft nur alle Logarithmen für eine und dieselbe, übrigens beliebige Basis genommen sind. Man muß sich daher in diesen 4 Formeln eine und dieselbe Basis noch dazu denken. — In der Formel 5. kommen Logarithmen mit verschiedener Basis vor.

Alle diese Formeln 1.—5. werden augenblicklich bewiesen, wenn man die Basis, c z. B., mit jeder der beiden Seiten der Gleichungen potenzirt, und dabei sich überzeugt, daß dann auf jeder Seite ein und dasselbe Resultat sich ergiebt. — Alle diese Beweise (des §. 4., des §. 14., des §. 31. und die hiesigen) bleiben dem Wesen nach immer genau dieselben.

Diese Gesetze lehren endlich im Praktischen, wie man den Logarithmen eines Produkts ab, eines Quotienten $\frac{a}{b}$, einer Potenz a^b und einer Wurzel $\sqrt[b]{a}$ findet, wenn in den beiden letztern Fällen *log* a, und in den beiden erstern Fällen auch noch *log* b bekannt ist. — Die Formel 5. lehrt noch überdies, wie der Logarithme einer Zahl a für eine Basis c gefunden wird, wenn er für eine andere Basis b schon bekannt ist.

§. 33. Ganz genau so wie im §. 6. und im §. 15. muß nun auch hier untersucht werden, ob die vorstehenden Gesetze §. §. 30.—32. bloß spezielle Gesetze der ganzen Zahlen, oder allgemeine Gesetze der Operationen sind. Sind sie das letztere, so kann man sie überall und unbedingt (also auch auf völlig unbekannte Ausdrücke) anwenden, ohne daß es nöthig wäre, sich um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern.

Weil wir aber in den vorhergegangenen zwei Kapiteln außer der absoluten ganzen Zahl, auch (im I. Kap.) noch die Differenz ganzer Zahlen (die positive und negative ganze Zahl, und die Null) und (im II. Kap.) auch noch den Quotienten zweier Differenzen ganzer Zahlen

(die reellen Zahlen, d. h. die positiv und negativ ganze und gebrochene Zahl und die Null) erhalten haben, mit denen wir nun zu rechnen bekommen, — so müßten wir hier, ganz analog dem im §. 15. Gesagten, zuerst wieder die Bedeutung der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und des Logarithmen $\overset{b}{log}\, a$ für den Fall erweitern, daß a und b nicht gerade ganze Zahlen, sondern, schon allgemeiner, Differenzen ganzer Zahlen (positive und negative ganze Zahlen oder Null) sind. Dann aber müßte genau und sorgfältig untersucht werden, ob dieselben Gesetze der §. §. 30.—32. für diese jetzt erweiterten Potenzen, Wurzeln und Logarithmen noch gelten, oder welche davon als allgemeine Gesetze keine Anerkennung finden dürfen.

Wäre dieses geschehen, dann müßte man die Bedeutung der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und des Logarithmen $\overset{b}{log}\, a$ auch noch für den Fall erweitern, daß a und b nicht gerade bloß Differenzen ganzer Zahlen, sondern, noch allgemeiner, Quotienten aus zweien Differenzen ganzer Zahlen (reelle Zahlen überhaupt) sind. Dann aber müßte genau und sorgfältig untersucht werden, ob dieselben Gesetze der §. §. 30.—32. für die jetzigen Begriffe (von a^b, $\sqrt[b]{a}$ und $\overset{b}{log}\, a$) noch gelten, oder welche davon als allgemeine Gesetze keine Anerkennung finden können.

Die erweiterten Begriffe der Potenz erhält man aber dadurch, daß man eines der Gesetze des §. 30. z. B. $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, oder des §. 31. z. B. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)}$ als Definition herbeizieht. Dadurch bewirkt man, daß jeder folgende allgemeinere Begriff der Potenz den frühern Begriff derselben allemal wirklich (als einen besondern Fall des jetzigen allgemeinern) in sich schließt. Mit dem erweiterten Begriff der Potenz ist aber der der Wurzel und der des Logarithmen allemal schon zugleich erweitert, wenn man die Definitionen der §. §. 28. und 29. den Worten nach beibehält.

Diese hier so eben genau bezeichneten Bestrebungen sieht man zum Theil in den Elementen begonnen, zum Theil in der sogenannten Analysis des Endlichen beendigt*). Wir geben in diesem Leitfaden nur den ersteren Theil derselben, jedoch möglichst sogleich in der Form, wie die praktische Anwendbarkeit der Resultate sie wünschenswerth macht. — In dem gegenwärtigen Kapitel nur noch einiges über die Potenzen.

---

*) Wir verweisen auf die 3te Auflage der beiden ersten Theile des „Versuch e. v. k. Systems d. Mathemat." Nürnberg 1853 und 1855.

§. 34. Zuerst setzen wir fest, daß wir uns unter a^b allemal das Produkt a.a.a.a...., aus b solchen Faktoren a, denken wollen, so oft b eine absolute ganze Zahl ist, wenn auch a bereits ganz allgemein gedacht wird. — Diese Potenz mag man eine ganze Potenz (d. h. Potenz mit ganzem Exponenten) nennen. — Für diese ganzen Potenzen wird nun die Gültigkeit der Gesetze des §. 30. auf's Neue leicht nachgewiesen.

§. 35. Hernach setzen wir fest, daß wir uns unter a^b allemal den Quotienten $\frac{a^\mu}{a^\nu}$ denken wollen, so oft der Exponent b eine Differenz $\mu - \nu$ zweier ganzen Zahlen ist. Der Dignand a ist natürlich hier ebenfalls ganz allgemein gedacht, so daß a^μ, a^ν die im §. 34. definirten ganzen Potenzen sind, für welche die Gesetze des §. 30. gelten. — Eine solche Potenz a^b mag eine Differenz-Potenz genannt werden. — Für diese Differenz-Potenzen wird nun die Gültigkeit der Formeln des §. 30. auf's Neue untersucht und bestätigt.

Dann aber geht aus dieser Definition natürlich auch sogleich die Bedeutung der folgenden Differenz-Potenzen

$$a^0, \qquad a^1, \qquad a^{-\mu}$$

hervor, nämlich

$$1)\ a^0 = 1;\quad 2)\ a^1 = a \quad \text{und} \quad 3)\ a^{-\mu} = \frac{1}{a^\mu}.$$

Anmerkung. Alles Weitere über den im §. 33. berührten Gegenstand, was hier aufgenommen werden soll, mag einem später folgenden Kapitel (dem 7ten) vorbehalten bleiben.

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Viertes Kapitel.

Von den bestimmten Zahlen. Gemeines Ziffern-Rechnen*). Von den Decimal-Brüchen.

§. 36. Eine bestimmte Zahl nennen wir gezählt oder bekannt, wenn wir ihre Zusammensetzung aus einigen wenigen

*) Das gemeine Ziffernrechnen ist nichts weiter als eine Anwendung der allgemeinen Gesetze der Operationen auf das Umformen von

ersten Zahlen, z. B. den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und der nach 9 folgenden Zahl zehn nachweisen können. — Die Bedeutung dieser wenigen ersten Zahlzeichen (Ziffern) und Zahlworte halten wir mittelst ihrer Aufeinanderfolge im Gedächtniß fest.

Um in dieses Zählen eine bequeme Ordnung zu bringen, bilden wir uns die Zahlworte Hundert (zehn mal zehn), Tausend (zehn mal hundert), Zehntausend, Hunderttausend, Million (tausend mal tausend), Billion (million mal million), Trillion (million mal billion), u. s. w. — Diese Zahlen nennt man Einheiten der höhern (1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 12ten, 18ten, ꝛc. ꝛc.) Ordnung.

§. 37. Jede bestimmte und gezählte (bekannte) Zahl erscheint dann als Summe (§. §. 1. und 2.) aus: einigen Einern (Ziffer von 1 bis 9), einigen Zehnern (Produkt aus einer Ziffer mit zehn multiplicirt), einigen Hunderten (Produkt aus einer Ziffer mit hundert multiplicirt), einigen Tausendern (Produkt aus einer Ziffer mit tausend multiplicirt), einigen Zehntausendern (Produkt aus einer Ziffer mit zehntausend multiplicirt), u. s. w. f.; wo jedoch, wie sich von selbst versteht, größere oder kleinere Zahlen mehr oder weniger solcher Summanden liefern, und viele Zahlen mehrere dieser Summanden gar nicht enthalten werden. — Wenn wir aber die im §. 7. definirte 0 (Null) und ihre in den §. §. 7. und 17. aus dieser Definition hergeleiteten Eigenschaften zu Hilfe nehmen, so können wir jeden fehlenden Summanden (z. B. die Hunderte) dadurch der Form nach ersetzen, daß wir z. B. Null Hunderter

---

Ausdrücken, welche ganze Zahlen vorstellen. — Wenn man auch im bürgerlichen Leben dieses gemeine Ziffernrechnen nach unerwiesenen, d. h. nicht in's Bewußtsein getretenen Vorschriften mechanisch einlernt, und später erst gründliche Mathematik zu treiben pflegt, so kann doch aus dem wissenschaftlichen Standpunkte angesehen, die Ziffernrechnung nur die Stelle einnehmen, die ihr hier angewiesen ist, wo sie nicht als ein Faktum gegeben, sondern erfunden werden muß.

(d. h. ein Produkt aus 0 und hundert) statt der fehlenden Hunderter einrücken. — Bei dieser Annahme fehlt dann keine Einheit höherer Ordnung aus der Mitte heraus, und dies erlaubt, im Schreiben dieser Summanden (welche Produkte des §. 11. sind) die Faktoren zehn, hundert, tausend, zehntausend rc. rc., ganz wegzulassen, bloß die Ziffern (=Faktoren) zu schreiben, und diese weggelassenen Faktoren (zehn, hundert, rc. rc.) bloß an der **Stelle**, welche die hingeschriebenen Faktoren einnehmen, wieder zu erkennen. — Dabei ist willkührlich angenommen, aber festgesetzt worden, daß man am weitesten zur Rechten die Einer, und so von der Rechten zur Linken in strenger Ordnung die Zehner, Hunderter, Tausender, u. s. w. f. schreiben wolle. Die Additions-Zeichen (+), welche zwischen je zwei dieser Summanden geschrieben werden müssen, erlaubt man sich ebenfalls im Schreiben wegzulassen, und sich solche hinzuzudenken, und so schreibt und liest man z. B.

98040354,

statt 9 Zehnmillionen und 8 Millionen und 4 Zehntausender und 3 Hunderter und 5 Zehner und 4.

Das Lesen erleichtert man sich noch dadurch, daß man von der Rechten zur Linken von 3 zu 3 Ziffern abtheilt, und dann von der Linken zur Rechten, jede solche Klasse auf einmal abliest. — So liest man danach die vorstehende Zahl 98040354: Acht und neunzig Millionen, vierzig Tausend, drei Hundert und vier und funfzig.

Nach dieser Annahme bedeutet das Zeichen 10 eine Summe aus 1 Zehner und Null, folglich zehn selbst. Nach dieser Annahme bedeutet ferner das Zeichen 100 eine Summe aus 1 Hundert, Null Zehner und Null, d. h. Hundert selbst. Eben so stellen die Zeichen 1000, 10000, 100000, 1000000, rc. rc. die Einheiten der folgenden höhern Ordnungen vor (aber nicht vermöge einer neuen Annahme, sondern vermöge der vorhin festgestellten, durch welche man sich das Schreiben einer bestimmten Zahl erleichtert).

§. 38. Da sonach jede gezählte und geordnete Zahl nichts

anders als eine Summe (der §. §. 1. und 2.) ist, mithin auch als eine algebraische Summe (des §. 9.) mit lauter additiven Gliedern betrachtet werden kann, so folgt, daß mit solchen bestimmten Zahlen nach den Gesetzen §. §. 4. 14. 20. 30—32., insbesondere aber nach den Gesetzen der §. §. 9. 18. und 22. (für algebraische Summen) gerechnet werden kann (§. 5.).

§. 39. Soll z. B. 426 zu 2547 addirt werden, so erhält man zunächst 426 + 2547, und das Geschäft des Addirens ist beendigt (nach §. 1.). Diese Summe 426 + 2547 kann aber nun nach den angeführten Gesetzen umgeformt und, wie das hier gewünscht wird, wieder auf die Form einer gezählten und geordneten Zahl gebracht werden. Deshalb addirt man (nach §. 9.) die einzelnen Summanden in beliebiger Ordnung, und — dem vorgesetzten Zwecke gemäß — die Einer zusammen, dann die Zehner zusammen, dann die Hunderter, u. s. w. f.

Die Summe zweier einzelnen Ziffern, z. B. 7 + 6, kann dadurch in eine gezählte und geordnete Zahl umgeformt werden, daß man z. B. $7+6=8+5=9+4=10+3=13$ sagt. — Im Praktischen muß man die so geordnete Summe von je zwei Ziffern (unter dem Namen des Eins und Eins) auswendig wissen.

§. 40. Ganz Analoges gilt vom Subtrahiren, wo man jeden Summanden einzeln subtrahiren muß, und am bequemsten die Gleichartigen von einander subtrahirt, wenn man einmal im Umformen, d. h. im Rechnen (§. 5.) begriffen ist.

§. 41. Soll aber 2547 mit 426 multiplicirt werden, so erhält man zunächst das Produkt

$$2547 \times 426,$$

und das Geschäft des Multiplicirens ist beendigt. Soll nun aber dieses Produkt 2547 × 426 noch in eine gezählte und geordnete Zahl (d. h. in eine nach §. 37. geordnete Summe) umgeformt werden, so muß man 2547 mit 6, dann mit 20 (oder 2 Zehnern), hernach mit 4 Hunderten multipliciren und zuletzt alles addiren (nach §. 14. Nr. 9. oder sogleich nach §. 18.), und so entsteht das (gewöhnliche) praktische Verfahren, wonach man zum Behufe des Addirens die Zehner, die Hun-

derter 2c. 2c. genau unter einander schreibt, also links einrückt oder rechts ausrückt, je nachdem man zuerst mit 6, dann mit 2 und zuletzt mit 4, — oder zuerst mit 4, dann mit 2 und zuletzt mit 6 multiplicirt hat.

§. 42. Soll aber 4829 durch 98 dividirt werden, so schreibt man $\frac{4829}{98}$, und das Geschäft des Dividirens ist beendigt. — Will man dieses Resultat $\frac{4829}{98}$ wiederum in eine gezählte und geordnete Zahl umformen, so muß man nach den §. §. 20—22. verfahren. — Weil aber bei diesem Verfahren der erste Summand ganz willkührlich genommen werden kann, so muß man ihn hier zweckmäßig annehmen, nämlich immer „die höchste Ziffer der höchsten Ordnung dazu wählen." Dadurch bewirkt man nämlich, daß die, mittelst jener Methode nach und nach entstehenden Summanden bereits so geordnet auf einander folgen, wie man es verlangt. Man erhält danach

$$\frac{4829}{88}=40+\frac{909}{98}=40+9+\frac{27}{99}=49\frac{27}{98}.$$

So ergiebt sich bald die (gewöhnliche) praktische Form des „Dividirens ganzer numerischer*) Zahlen."

§. 42a. Führt man zehn Ziffern ein (die Null des §. 7. nennt man auch eine Ziffer, weil sie hier unter den übrigen Ziffern mit erscheint) und ordnet man alle bestimmten Zahlen bei dem Zählen nach den ganzen Potenzen von zehn, wie wir dies (in den vorstehenden §. §.) gethan haben, so nennt man diese Anordnung das dekadische Zahlen-System. — Es ist einleuchtend, daß man zu demselben Zwecke statt des dekadischen Systems das dodekadische (mit zwölf Ziffern), das tetradische (mit vier Ziffern), und jedes andere mit einer beliebigen, aber nicht zu großen Anzahl von Ziffern einführen könnte. In unserer Sprache hat man das dekadische System zu Grunde gelegt, und deshalb fällt es Anfängern etwas schwerer, sich in

---

*) Eine auf die gewöhnliche und hier im §. 37. näher beschriebene Weise geordnete bestimmte Zahl nennt man bequem eine numerische.

ein anderes hineinzudenken, weil man sich für die verschiedenen ganzen Potenzen der Grundzahl des Systems auch erst Zahlworte schaffen muß.

Anmerkung. Da jeder, der Mathematik treibt, das „gemeine Rechnen" bereits praktisch kennt, so kam es bei dem mathematischen Vortrage desselben nur darauf an, diesem „gemeinen Rechnen" die rechte Stelle anzuweisen, und recht deutlich hervorzuheben, wie das gemeine Rechnen aus dem im §. 5. gegebenen Begriff des Rechnens hervorgeht.

§. 43. Das dekadische Zahlen-System macht den Gebrauch der Decimal-Brüche wünschenswerth. — Decimal-Bruch wird nämlich jeder Bruch, z. B. $\frac{7}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{3276}{1000}$, $\frac{45}{10000}$ 2c. 2c. genannt, dessen Nenner entweder 10 oder doch irgend eine ganze Potenz von 10, z. B. 100, 1000, 10000, 2c. 2c. ist. — Gewöhnlich schreibt man bloß den Zähler desselben allein, in welchem man ein Komma so anbringt, daß rechts vom Komma gerade noch so viele Ziffern (Decimalstellen genannt) stehen, als der Nenner Nullen hat. — Obige Brüche

$$\frac{7}{10};\quad \frac{7}{100};\quad \frac{3276}{1000};\quad \frac{45}{10000}$$

schreibt man also bloß so

$$0{,}7;\quad 0{,}07;\quad 3{,}276;\quad 0{,}0045;$$

indem man links des Komma noch eine Null schreibt, wenn keine andere Ziffer mehr da ist.

Läßt man also in dem Decimal-Bruch 3,276 das Komma weg, so hat man den Zähler desselben, und die 3 (Decimal-) Stellen rechts vom Komma zeigen an, daß der Nenner 3 Nullen hat, also 1000 ist. Der Bruch 3,276 muß daher so abgelesen werden: Drei Tausend zwei hundert und sechs und siebenzig Tausend-Theil. — Weil aber (nach §. 20.)

$$\frac{3276}{1000} = 3 + \frac{276}{1000} = 3 + 0{,}276$$

ist, so kann man denselben Bruch 3,276 als gemischte Zahl ablesen, nämlich so: „Drei Ganze und zwei hundert und sechs und siebenzig Tausend „Theil", ohne gerade einen zu wesentlichen Fehler zu begehen*). —

*) D. h. man liest das nicht ab, was das Zeichen, der Definition zufolge, bedeutet; aber man liest doch etwas ab, was dem definirten Gegenstande gleich ist.

Und weil z. B. (nach §. 14. Nr. 11.)

$$0{,}276 = \frac{276}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{6}{1000}$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{6}{1000}$$

ist, so kann man denselben Bruch 3,276, wenn man will, auch als diese Summe: „drei Ganze, 2 Zehn-Theil, 7 Hundert-Theil und 6 Tausend-„Theil" ablesen.

§. 44. Aus diesen Definitionen und Betrachtungen geht aber unmittelbar hervor:

1) Ein Decimal-Bruch bleibt seinem Werthe nach unverändert, wenn man am weitesten zur Rechten Nullen anhängt oder wegläßt; z. B. 7,6300 = 7,630 = 7,63 = 7,630000.

Denn es ist dadurch bloß Zähler und Nenner zugleich durch eine und dieselbe Zahl 10, 100, ꝛc. ꝛc. multiplicirt oder dividirt (§. 24. I.).

2) Decimal-Brüche werden unter einerlei Benennung gebracht (§. 24. II.), wenn man beiden gleich viele Decimal-Stellen giebt, also wenn man dem einen zur Rechten noch so viele Nullen anhängt (nach 1.), als ihm Decimal-Stellen fehlen, um eben so viele zu haben, als der andere schon hat.

§. 45. Weil Decimal-Brüche nichts anders als gewöhnliche Brüche, also Quotienten (angezeigte Divisionen) sind, so kann man mit ihnen auch nicht nach andern Gesetzen rechnen, als nur nach denen, die im §. 24. für das Rechnen mit Brüchen angeführt worden sind.

1) Decimal-Brüche werden daher addirt (oder subtrahirt) zu (oder von) einander, wenn man sie zuvor unter einerlei Benennung bringt (d. h. sie mit dem Komma unter einander setzt, und die rechts fehlenden Stellen mit Nullen ausgefüllt sich denkt), dann die Zähler (die ganzen Zahlen, welche bei dem Weglassen des Komma entstehen) zu (oder von) einander addirt (oder subtrahirt), zuletzt aber den gemeinschaftlichen Nenner beibehält (d. h. im Resultat wieder so viele Decimal-Stellen von der Rechten zur Linken abschneidet, als jeder der unter einerlei Benennung gebrachten einzelnen Decimal-Brüche deren hat).

2) Zwei Decimal-Brüche werden mit einander multiplicirt (nach §. 14. Nr. 7.), wenn man ihre Zähler mit einander mul-

tiplicirt und auch ihre Nenner. Man muß also die Komma sich wegdenken, damit man die Zähler habe; — solche ganze Zahlen dann mit einander multipliciren, damit man den neuen Zähler erhalte; — dann aber (weil der neue Nenner das Produkt der alten sein muß) von der Rechten zur Linken so viele Decimal-Stellen abschneiden, als die beiden Faktoren deren zusammen haben. — Steht statt des einen dieser mit einander zu multiplicirenden Decimal-Brüche eine ganze Zahl, so kann die Multiplikation nach derselben Regel behandelt werden, wenn man nur die ganze Zahl als einen Decimal-Bruch ansieht, welcher gar keine Decimal-Stelle hat.

3) Ein Decimal-Bruch A wird durch einen andern Decimal-Bruch B dividirt (nach §. 14. Nr. 7. 2te Formel), wenn man Zähler durch Zähler dividirt, dann auch Nenner durch Nenner.— Man muß daher die Komma sich wegdenken, damit man die Zähler habe, dann den Zähler (die ganze Zahl) von A, durch den Zähler (die ganze Zahl) von B dividiren, und man hat den neuen Zähler (der freilich nach dem Beispiele des §. 41. nicht immer eine ganze Zahl werden wird). Zuletzt muß man dann, in so fern der neue Nenner der Quotient der alten ist) so viele Decimal-Stellen, von der Rechten zur Linken gehend, abschneiden, als der Dividend A Decimal-Stellen hat, weniger der Anzahl der Decimal-Stellen des Divisors B.

Dividirt man also z. B. 4,829 durch 9,8, so erhält man zuerst

$$\frac{4829}{98} = 49 + \frac{27}{98};$$

dann aber als Endresultat

$$0{,}49 + \frac{27:98}{100},$$

wo der erste Theil ein Decimal-Bruch 0,49 ist, während der andere Theil sehr klein $\left(\text{hier} < \frac{1}{100}\right)$ wird, und — wie später noch gezeigt werden muß — in den Anwendungen oft ganz weggelassen werden kann.

Da man statt des Dividenden 4,829 auch 4,82900 schreiben kann, so erhält man, wenn man jetzt dieselbe Division noch verrichtet, zuerst

$$\frac{482900}{98} = 4927 + \frac{54}{98},$$

also zum Endresultat der Division

$$0{,}4927 + \frac{54:98}{10000},$$

wo der zweite Theil $\frac{54:98}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$ ist.

Bleibt also bei der Division der Zähler ein Rest, so hänge man an den Dividenden nur immer mehr Nullen an, und man bekommt im Resultat einen Decimal-Bruch mit immer mehr Decimal-Stellen, ja selbst mit unendlich vielen Decimal-Stellen (also, wie in den §. §. 21. 22., eine unendliche Reihe, welche letztere Form dann zu den irrationalen Zahlen gezählt wird.*)

Wo man aber mit der Division abbricht, da kommt dann allemal noch der letzte Summand (das Ergänzungs-Glied) hinzu, welcher jedoch immer kleiner ist, als eine Einheit der letzten Decimal-Stelle zur Rechten des durch die Division erhaltenen Decimal-Bruches (des Quotienten), so daß er in den Anwendungen meist weggelassen werden kann. (In der Theorie darf man nichts weglassen, sondern man muß jeden Theil, wenn man ihn auch nicht schreiben will, doch wenigstens jedesmal sich noch hinzudenken.)

4) Da diese Regel (für die Division zweier Decimal-Brüche), in so fern man jede ganze Zahl (z. B. 47) auch als Decimal-Bruch schreiben kann (nämlich 47,000 oder 47,00000), auch für die Division zweier ganzen Zahlen angewandt werden kann, so hat man hieraus sogleich die Regel, wie jeder gewöhnliche Bruch, z. B. $\frac{3}{47}$ in einen Decimal-Bruch verwandelt wird.

Man hängt nämlich an den Zähler (3) so viele Nullen, als man Decimal-Stellen haben will, dividirt dann mit dem Nenner

---

*) Jede gebrochene Zahl heißt eine irrationale, wenn ihr Zähler und ihr Nenner unendlich groß sind, während sie selbst zwischen völlig bestimmten Grenzen liegt, die einander so nahe rücken können, als man nur immer will (d. h. deren positive oder absolute Differenz eine so kleine Zahl werden kann, als man sie nur immer haben will). — Unter allen absoluten Zahlen ist aber die Null selbst (nach Anmerkung zu §. 26.) die kleinste.

(47) hinein, giebt aber dem Resultat so viele Decimal-Stellen, als man im Zähler (Dividenden) Nullen angehängt hat. Das sich noch hinzu zu denkende, oder (nach Nr. 3.) noch genau zu bestimmende Ergänzungs-Glied ist dann allemal kleiner als eine Einheit der letzten Decimal-Stelle zur Rechten.

So findet man

$$\frac{3}{47} = 0{,}06 + \frac{18:47}{100} = 0{,}063 + \frac{39:47}{1000} = 0{,}0638 + \frac{14:47}{10000}$$

$$= 0{,}06382 + \frac{46:47}{100000} = 0{,}063829 + \frac{37:47}{1000000} = \text{etc. etc.}$$

$$= 0{,}063829 \ldots\ldots \text{ in infinit.}$$

5) Ein solcher irrationaler Decimal-Bruch ist, wenn er durch die Division zweier ganzen Zahlen oder Decimal-Brüche entsteht, allemal periodisch, d. h. dieselben Decimal-Stellen kehren in derselben Ordnung ohne Ende fort periodisch wieder*),

z. B. 0,571428571428571428571 ....,
0,47352352352352352 ....,

wo der erstere ein rein oder vollständig periodischer genannt wird, der andere aber ein unrein oder unvollständig periodischer heißt, weil er zuerst einige Decimal-Stellen hat, ehe die Periode beginnt.

Multiplicirt man den ersten dieser beiden periodischen Decimal-Brüche mit 1000000, so erhält man 571428 Ganze und noch denselben periodischen Decimal-Bruch, so daß das 999999 fache des periodischen Decimal-Bruches gerade 571428 Ganze macht, er selbst also $= \frac{571428}{999999}$, oder $= \frac{4}{7}$ ist.

Auf eine analoge Weise kann man auch den zweiten (unrein) periodischen Decimal-Bruch

$$0{,}47352352352352 \ldots = z.$$

---

*) Der bei der Division ganzer Zahlen zuletzt übrig bleibende Rest ist allemal kleiner als der Divisor. Ist also z. B. der Divisor 18, so ist jeder der Reste kleiner als 18; setzt man daher die Division mehr als 17mal fort, so muß ein Rest kommen, der schon einmal da gewesen ist, und von da an tritt die Periode ein, wenn sie sich nicht schon früher gezeigt hat.

in einen gemeinen Bruch verwandeln. Man multiplicirt (in diesem Beispiele) links und rechts mit 100, auch mit 100000 und erhält

$$47,352352352\cdots = 100\cdot z.$$
$$47352,352352352\cdots = 100000\cdot z.$$

Subtrahirt man nun links und rechts das Obere vom Untern, so erhält man

$$47305 = 99900\cdot z.$$

Dividirt man aber hier durch 99900 auf jeder Seite, so findet sich

$$\frac{47305}{99900} = z = \frac{9461}{19980}.$$

Aus diesen beiden Beispielen fällt aber die allgemeine Regel in die Augen, durch welche periodische Decimal-Brüche in diejenigen gemeinen Brüche verwandelt werden, denen sie ihr Dasein verdanken.

Anmerkung 1. Solche Betrachtungen, wie die letzteren, sind es, welche uns eine nähere Kenntniß der Eigenschaften der bestimmten Zahlen wünschenswerth machen. Etwas davon mag daher im nächsten Kapitel folgen.

Anmerkung 2. Weil man in den Anwendungen, wie wir später sehen werden, in der Regel solche Zahlen außer Acht lassen kann, welche positiv und gegen die in der Rechnung vorkommenden sehr klein sind, so kann man auch oft schon während des Arbeitens mit Decimal-Brüchen, alle diejenigen Decimal-Stellen außer Acht lassen, welche gegen diejenigen, die die Rechnung vom Anfang an hatte oder erhielt, sehr klein und klein genug sind. — Diese Betrachtung giebt Veranlassung zum abgekürzten Multipliciren mit Decimal-Brüchen, welches bei dem praktischen Arbeiten von großer Wichtigkeit wird. Um selbiges kurz und deutlich zu beschreiben, stellen wir zunächst folgende Rechnungen gegen einander; nämlich die

vollständ. Multiplikation		und die abgekürzte Multiplikation.
1ster Faktor 0,3721986		0,3721986
2ter Faktor 4,468357		4,468357
14887944		14887944
1488794	4	1488794
223319	16	223319
29775	888	29776
1116	5958	1117
186	09930	186
26	053902	26
1,6631162	197002	1,6631162

Bei der vollständigen Multiplikation in dem Schema zur Linken hat man sich zuerst die Komma weggedacht, um die Zähler der Brüche zu haben, — dann diese beiden ganzen Zahlen mit einander multiplicirt, wie eben ganze Zahlen mit einander multiplicirt werden, — dabei aber hat man, statt mit der Ziffer (7) am weitesten zur Rechten des Multiplikators anzufangen, und jede folgende Reihe links einzurücken, lieber mit der Ziffer (4) am weitesten zur Linken des Multiplikators angefangen, dagegen jede folgende Reihe rechts ausgerückt. — In dem nebenbei stehenden Schema zur Rechten ist nun dasselbe geschehen, nur daß man die rechts hinaus zu rückenden Ziffern sogleich alle weggelassen hat. In dem Endresultat hat man doch 7 Decimal-Stellen, also eben so viele als jeder der beiden Faktoren deren hatte, und die übrigen sind nun gegen diese erstern 7, als sehr klein außer Acht gelassen.

Wenn man dabei in dem Schema zur Rechten einmal am weitesten zur Rechten, wo eine 5 stehen sollte, eine 6 erblickt, und in der gleich darauf folgenden Zeile statt der Endziffer 6 eine 7, so hat man dabei die Regel befolgt, „diese Endziffer jedesmal um 1 zu erhöhen, so oft die nächste der weggelassenen Ziffern größer als 5 ist."

Während endlich in dem Schema links unten 13 Decimal-Stellen abgeschnitten werden mußten (nämlich so viele, als beide Faktoren zusammen deren haben), um das richtige Resultat der

Multiplikation zu erhalten, durfte man in dem Schema zur Rechten deshalb nur 7 Decimal-Stellen abschneiden, weil der Multiplikator, ohne auf die Stellung des Komma zu sehen, 7 Ziffern hatte, folglich die Multiplikation 7 Reihen gab, während bei der 2ten Reihe schon hätte ausgerückt werden müssen, so daß 6 (nämlich 1 weniger als die Zahl der Ziffern des Multiplikators) Decimal-Stellen bereits weggelassen waren.

Es ist leicht, nach diesem Beispiele in jedem anderen sich zu richten.

Anmerkung. 3. Es giebt auch eine abgekürzte Division mit Decimal-Brüchen, welche darin besteht, daß man, wenn man schon einige Decimal-Stellen des Quotienten gefunden hat, statt bei jeder neuen Division eine neue Ziffer des Dividenden herunter zu setzen, jedesmal eine Decimal-Stelle des Divisors dagegen wegläßt. Obgleich auf diese Weise der Quotient immer etwas zu groß werden muß, so stimmt doch eine in der Rechnung gerade gewünschte Anzahl von Decimal-Stellen, mit dem Resultat der genauen Rechnung überein, und in so fern ist das Verfahren zuläßig, sobald man überhaupt etwas sehr Kleines außer Acht lassen will. Man muß jedoch dieselbe Vorsicht beobachten, welche bei dem abgekürzten Multipliciren so eben angegeben worden ist.

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Fünftes Kapitel.

Einige Eigenschaften der bestimmten Zahlen. Primzahlen. Theiler. Vielfaches. Kettenbrüche.

§. 46. Eine ganze Zahl b heißt ein Theiler einer andern Zahl a, wenn $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl wird.

Die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, in infinitum, welche durch keine andere Zahl (ohne Rest) getheilt werden können, heißen absolute Primzahlen oder

Primzahlen schlechtweg. Alle übrigen Zahlen, z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, ꝛc. werden zusammengesetzte Zahlen genannt.

Alle durch 2 (ohne Rest) theilbaren Zahlen heißen gerade Zahlen; die Form 2n stellt daher jede gerade Zahl vor, wenn unter n jede ganze Zahl verstanden wird. — Die Form 2n+1 stellt dann, unter derselben Voraussetzung, alle ungeraden Zahlen vor.

Die Form 3n liefert alle durch 3 theilbaren Zahlen; während die Formen 3n+1 und 3n+2 alle durch 3 nicht theilbaren Zahlen aussprechen.

§. 47. 1) Jede zusammengesetzte Zahl kann nur auf eine Art in Faktoren zerlegt werden, welche Primzahlen sind, und welche einfache Faktoren genannt werden.

2) Die Zerlegung einer Zahl z. B. 3960 in ihre einfachen Faktoren geschieht versuchsweise dadurch, daß man solche durch die kleinste Primzahl zu dividiren sucht, welche keinen Rest mehr läßt, wodurch man zwei Faktoren der Zahl erhält, von welchen der eine diese Primzahl ist; nämlich 2·1980. — Verfährt man nun mit dem andern Faktor 1980 auf's Neue eben so, so erhält man statt seiner das Produkt 2·990. — Dieser zweite Faktor giebt wieder 2·495. — Ferner findet sich auf demselben Wege 495 = 3·165; 165 = 3·55; endlich 55 = 5·11. — Also hat man zuletzt 3960 = 2·2·2·3·3·5·11.

3) Will man von mehreren Zahlen, z. B. 8, 10, 6, 9 und 15 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, d. h. eine Zahl finden, welche durch 8, 10, 6, 9 und 15 ohne Rest dividirt werden kann, welche aber zugleich die kleinste ihrer Art ist, — so zerlege man jede der gegebenen Zahlen in ihre einfachen Faktoren, so daß man bekommt

8 = 2·2·2; 10 = 2·5; 6 = 2·3; 9 = 3·3; 15 = 3·5;

und nehme dann alle diese einfachen Faktoren, jedoch so, daß man denselben Faktor, der in mehreren der gegebenen Zahlen zugleich vorkommt, nur einmal nimmt. Dies giebt zur gesuchten Zahl das Produkt

2·2·2·3·3·5 oder 360.

Das praktische Verfahren des Ganzen sieht so aus

2	8, 10, 6, 9, 15
	4, 5, 3,
3	1, 3, 5,
5	1, 1,

so nämlich, daß zuerst durch 2 dividirt wird, wo man kann; dann mit 3, wo man kann; und so mit derselben oder der nächst höhern Primzahl dividirt wird, so oft noch wenigstens zwei der rechts stehenden Zahlen ohne Rest dividirt werden können. Die Primzahlen 2, 3, 5 und die übrig bleibenden Zahlen (Quotienten, die nicht auf's Neue mehr dividirt worden sind) 4, 3, mit einander multiplicirt, liefern dann das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ oder 360.

4) Will man aber von zweien Zahlen 48 und 60 den größten gemeinschaftlichen Theiler finden, so zerlege man 48 und 60 in ihre einfachen Faktoren, nämlich

$48 = 2 \cdot 24 = 2 \cdot 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$;

und $60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$;

und nehme das Produkt aller gemeinschaftlichen einfachen Faktoren, d. h. $2 \cdot 2 \cdot 3$, also die Zahl 12, — so hat man den gesuchten größten gemeinschaftlichen Theiler von 48 und 60 *).

Mittelst nachstehender Sätze erhält man die Lösung derselben Aufgabe.

§. 48. Dividirt man mit der ganzen Zahl b in die ganze Zahl a, so daß man zum Quotienten eine ganze Zahl q, außerdem aber noch einen Rest r erhält, so ist nach den Regeln dieser Division oder nach §. 20.

$$r = a - b.q, \text{ also auch } a = b.q + r;$$

mithin, wenn man jede Gleichung auf jeder Seite des Gleichheits-Zeichens durch irgend eine Zahl μ dividirt,

---

*) Diese Aufgabe wird bei dem praktischen Arbeiten mit Brüchen wichtig. — Hat man z. B. den Bruch $\frac{48}{60}$, so kann man statt seiner einen andern ihm gleichen setzen wollen, „der in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist." — Zu dem Ende dividirt man Zähler und Nenner durch den größten gemeinschaftlichen Theiler 12; dadurch erhält man $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$. Man kann also $\frac{4}{5}$ statt $\frac{48}{60}$ setzen und dabei überzeugt sein, daß man diesen Bruch nicht mehr in kleinern Zahlen ausdrücken könne.

$$\frac{r}{\mu} = \frac{a}{\mu} - \frac{b}{\mu} \cdot q \text{ und } \frac{a}{\mu} = \frac{b}{\mu} \cdot q + \frac{r}{\mu}.$$

Die Betrachtung dieser letztern Gleichungen lehrt aber unmittelbar:

1) Wenn $\frac{a}{\mu}$ und $\frac{b}{\mu}$ ganze Zahlen sind, so ist auch $\frac{r}{\mu}$ eine ganze Zahl; d. h. wenn μ ein gemeinschaftlicher Theiler vom Divisor b und Dividenden a ist, so ist dieselbe Zahl μ auch ein Theiler des Restes r.

2) Wenn $\frac{b}{\mu}$ und $\frac{r}{\mu}$ ganze Zahlen sind, so ist auch $\frac{a}{\mu}$ eine ganze Zahl, d. h. die Zahl μ, welche den Divisor b und den Rest r theilt, theilt auch den Dividenden a.

§. 49. Soll nun die Aufgabe des §. 47. Nr. 4. noch einmal gelöst, — soll z. B. der größte gemeinschaftliche Theiler von 28 und 40 gesucht werden, so führe man die nachstehende Rechnung aus

```
28|40|1
  |28|
  ----
   12|28|2
     |24|
     ----
      4|12|3
       |12|
       ----
        —
```

wo mit jedem Rest auf's Neue in den letzten Divisor dividirt ist, so lange bis endlich die Division aufgeht. Der letzte Divisor 4 ist dann der gesuchte **größte** gemeinschaftliche Theiler von 28 und 40.

Denn da die Zahl 4 sich selber und auch den Divisor 12 theilt, so theilt sie auch (nach §. 48. Nr. 2.) den **Dividenden** 28, d. h. in der nächstvorhergehenden Division den **Divisor** 28 und den Rest 12, also (nach § 48. Nr. 2.) wiederum den Dividenden 40; mithin 28 und 40 zugleich.

Und gäbe es eine größere Zahl, welche den Dividenden 40 und den Divisor 28 zugleich theilte, so würde dieselbe (nach §. 48. Nr. 1.) den Rest 12, und dann (noch einmal nach §. 48. Nr. 1.) auch jeden folgenden Rest, d. h. auch den letzten 4 theilen, was nicht möglich ist, weil nie eine kleinere Zahl durch eine größere getheilt werden kann.

Anmerkung. Hat man einen Bruch $\frac{a}{b}$, „der nicht mehr „aufgehoben werden kann,“ d. h. welcher in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist (in welchem also Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben), so kann man doch noch suchen, andere Brüche dafür zu setzen, die möglichst wenig von ihm verschieden sind, und welche in kleineren Zahlen ausgedrückt sich zeigen. Dazu bedient man sich der Verwandlung des Bruches in einen Kettenbruch. Diese Verwandlung beginnt mit derselben Rechnung, wie solche hier zu Anfang des vorstehenden §. 49. zu sehen ist.

§. 50. Dividirt man nämlich eines Bruches, z. B. $\frac{73}{203}$, Zähler und Nenner durch den Zähler 73, so erhält man

$$1)\ \frac{73}{203}=\frac{1}{2+\frac{57}{73}}<\frac{1}{2}\ ^{*}).$$

Dividirt man nun in dem Bruche $\frac{57}{73}$ wiederum Zähler und Nenner durch den Zähler 57, so ergiebt sich

$$2)\ \frac{73}{203}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{16}{57}}}>\frac{1}{2+\frac{1}{1}}.$$

Fährt man aber so fort in jedem dieser neu entstehenden (ächten) Brüche, Zähler und Nenner durch den Zähler zu dividiren, so erhält man nach und nach

$$3)\ \frac{73}{203}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{9}{16}}}}<\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

---

*) Weil $2+\frac{57}{73}>2$ ist, darum ist $\frac{1}{2+\frac{57}{73}}<\frac{1}{2}$.

4) $$\frac{73}{203} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{9}}}}} > \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}$$

5) $$\frac{73}{203} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{7}}}}}} < \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$$

6) $$\frac{73}{203} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}}}}} > \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}}.$$

Dieser letzte Quotient in Nr. 6. unmittelbar rechts vom Gleichheits-Zeichen ist der, dem gegebenen Bruch $\frac{73}{203}$ gleiche Kettenbruch oder continuirliche Bruch. Die Zahlen 2, 1, 3, 1, 1, 3, 2 heißen seine Glieder. Die Brüche in Nr. 6., Nr. 5., Nr. 4., Nr. 3., Nr. 2. und Nr. 1. am weitesten zur Rechten, welche abwechselnd kleiner und größer sind als der gegebene Bruch $\frac{73}{203}$ (und welche nach und nach immer eines der Glieder weniger enthalten), heißen seine Partial-Kettenbrüche oder schlechtweg Partial-Brüche. Die praktische Rechnung aber, um die Glieder des Kettenbruches zu finden, ist genau die des Schema zu Anfange des §. 49.

§. 51. Will man umgekehrt einen Kettenbruch, z. B.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

in einen gemeinen Bruch verwandeln, so geschieht dies am be-

quemsten, wenn man nach und nach alle seine Partial-Brüche und zuletzt erst ihn selber verwandelt. Man schreibt also zuerst

1) $$\frac{1}{a+\frac{1}{b}}=\frac{1}{\left(\frac{ab+1}{b}\right)}=\frac{b}{ab+1}.$$

Dann setzt man links und rechts $b+\frac{1}{c}$ statt b, und erhält

2) $$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}=\frac{b+\frac{1}{c}}{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}=\frac{bc+1}{(ab+1)c+a}.$$

Setzt man nun hier wieder links und rechts $c+\frac{1}{d}$ statt c, so ergiebt sich

3) $$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}}=\frac{b\cdot\left(c+\frac{1}{d}\right)+1}{(ab+1)\left(c+\frac{1}{d}\right)+a}$$
$$=\frac{(bc+1)\cdot d+b}{[(ab+1)c+a]\cdot d+ab+1}$$

Und wird hier noch $d+\frac{1}{e}$ statt d gesetzt, so hat man weiter

4) $$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+\frac{1}{e}}}}}$$
$$=\frac{[(bc+1)\cdot d+b]\cdot e+(bc+1)}{\left([(ab+1)c+a]\cdot d+ab+1\right)\cdot e+[(ab+1)\cdot c+a]}$$

Betrachtet man diese allgemeinen Ausdrücke in Nr. Nr. 1.—4. zur Rechten genauer, so findet man bald:

I. Der Zähler eines jeden folgenden Bruches wird gefunden, wenn man den ihm nächst vorhergehenden Zähler mit dem neuen Gliede des Kettenbruches multiplicirt und den zweitvorhergehenden Zähler addirt.

II. Der Nenner dazu wird aus den Nennern der beiden vorangehenden Brüche ganz nach dem analogen Gesetze gefunden.

III. Damit man nun nach demselben Gesetze sogleich auch den ersten dieser Brüche, nämlich $\frac{b}{ab+1}$, und auch den allerersten, nämlich $\frac{1}{a}$, finden könne, so denkt man sich im Praktischen die beiden Quotienten $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ als allen diesen Brüchen noch vorangehend. Durch diese Fiktion erreicht man seinen Zweck.

Wendet man diese praktischen Regeln (I.—III.) auf den Kettenbruch des §. 50. an, dessen Glieder 2, 1, 3, 1, 1, 3, 2 sind, so erhält man das Schema:

Glieder			2,	1,	3,	1,	1,	3,	2
Brüche	$\frac{1}{0}$,	$\frac{0}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{4}{11}$,	$\frac{5}{14}$,	$\frac{9}{25}$,	$\frac{32}{89}$,	$\frac{73}{203}$,

so daß man der Reihe nach abwechselnd die größern und kleinern Brüche zur Rechten in den Nummern 1—6. des §. 50., zuletzt aber den ganzen Kettenbruch in gleichgeltende gemeine Brüche umgeformt hat.

§. 52. Subtrahirt man diese Brüche in dem vorliegenden Schema paarweise von einander, und zwar immer zwei nächst auf einander folgende, so erhält man die Unterschiede

$$+\frac{1}{6}, -\frac{1}{33}, +\frac{1}{153}, -\frac{1}{350}, +\frac{1}{2225}, -\frac{1}{18067},$$

die immer die Einheit zum Zähler haben, und immer größere Nenner, nämlich zum Nenner das Produkt je zweier der nächst auf einander folgenden, also immer größer werdenden Nenner im Schema.

Dieses Gesetz der Unterschiede findet sich allemal, und ist eine nothwendige Folge der Gesetze Nr. Nr. I.—III. des §. 51. Sind nämlich $\frac{M}{N}$ und $\frac{P}{Q}$ zwei auf einander folgende Brüche, so ist nach diesen Nr. Nr. I.—III. des §. 51., der nun folgende

Bruch im Schema, $= \frac{P \cdot r + M}{Q \cdot r + N}$, wenn r sein letztes (neu hinzugetretenes Glied vorstellt *). Nun findet sich

$$\frac{M}{N} - \frac{P}{Q} = \frac{MQ - NP}{NQ} = -\frac{NP - MQ}{NQ};$$

dagegen

$$\frac{P}{Q} - \frac{P \cdot r + M}{Q \cdot r + N} = \frac{NP - MQ}{Q \cdot (Q \cdot r + N)} = -\frac{MQ - NP}{Q \cdot (Q \cdot r + N)}.$$

Jeder dieser Unterschiede hat also denselben Zähler nur abwechselnd (+ oder —). Da nun die beiden erstern Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{b}{ab+1}$, wenn sie von einander subtrahirt werden, den Unterschied $\frac{1}{a(ab+1)}$ geben, so folgt, daß jedesmal $MQ - NP = \pm 1$ sein müsse.

Aus diesem Gesetze zieht man nachstehende wichtige Folgerung:

1) „Die (auf dem praktischen Wege des §. 51. zu findenden) Partial-Brüche kommen dem ganzen Bruche nach und nach immer näher, in je größern Zahlen sie erscheinen; sie sind dabei abwechselnd größer und kleiner als der ganze."

2) „Die (Kreuz-) Produkte aus dem Nenner eines der Brüche und dem Zähler des nächsten, eben so aus dem Zähler

---

*) Ist s das neu hinzutretende Glied des nächsten Partial-Bruches, so erhält man diesen nächsten Partial-Bruch aus dem vorhergehenden $\frac{P \cdot r + M}{Q \cdot r + N}$, wenn man $r + \frac{1}{s}$ statt r schreibt. Solcher wird daher

$$= \frac{P \cdot \left(r + \frac{1}{s}\right) + M}{Q \cdot \left(r + \frac{1}{s}\right) + N} = \frac{(P \cdot r + M) \cdot s + P}{(Q \cdot r + N) \cdot s + Q},$$

und so sieht man das Gesetz I. II. des §. 51. für jeden folgenden Bruch bestätigt, so oft es für den nächst vorhergehenden gilt. Da nun dasselbe Gesetz für die erstern Brüche (im §. 51.) in die Augen fällt, so folgt solches für jeden folgenden der Brüche. Dadurch ist aber die Behauptung §. 51. I. II. erwiesen.

des erstern und dem Nenner des nächsten, sind allemal um 1 von einander verschieden."

3) „Der letzte Partial-Bruch (im Beispiel ist dies der Bruch $\frac{32}{89}$) liefert also allemal Vielfache der gegebenen (den Zähler und Nenner des gegebenen Bruches bildenden) Zahlen (im Beispiele, der Zahlen 73 und 203), deren Unterschied die 1 ist; nämlich

$$73 \cdot 89 - 203 \cdot 32 = 1.$$

§. 52a. Man kann sich daher der vorstehenden Theorie der Kettenbrüche bedienen:

a) um für einen gegebenen Bruch, z. B. $\frac{47}{89}$, Näherungs-Brüche zu finden, in kleinern Zahlen ausgedrückt, welche unter allen in nicht größern Zahlen ausgedrückten Brüchen dem gegebenen am nächsten kommen;

b) um, wenn Zahlen, z. B. 47 und 89, gegeben sind, Vielfache derselben zu finden, die nur um 1 von einander unterschieden sind.

Um beide Aufgaben zu lösen, findet man zuerst nach dem Schema des §. 50. die Glieder des Kettenbruches, in welchen $\frac{47}{89}$ verwandelt werden kann, d. h.

```
47|89|1
  |47|
  ----
  42|47|1
    |42|
    ----
     5|42|8
      |40|
      ----
       2|5|2
        |4|
        ---
         1|2|2
          |2|
          ---
```

die Glieder 1, 1, 8, 2, 2; und bildet sich dann die Partial-Brüche nach dem Schema des §. 51., nämlich

$$1,\ 1,\ 8,\ 2,\ 2$$

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{9}{17}, \frac{19}{36}, \frac{47}{89}.$$

Diese Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{17}$, $\frac{19}{36}$ sind nun die gesuchten Näherungs-Brüche, die vom gegebenen Bruch $\frac{47}{89}$ weniger verschieden sind, als jeder andere in nicht größern Zahlen ausgedrückte Bruch es sein könnte. So ist die Aufgabe a) gelöst.

Der Nenner 36 und der Zähler 19 des letzten Bruches im Schema, geben aber zu gleicher Zeit die in b) gesuchten Vielfachen. Denn es ist

$$47 \cdot 36 - 89 \cdot 19 = 1.$$

§. 53. Mittelst dieser Theorie der Kettenbrüche kann man aber auch folgende Aufgaben lösen, nämlich:

Vielfache der Zahlen 47 und 89 zu finden, so daß, wenn r irgend eine gegebene ganze Zahl ist,

$$\text{I.}\quad 47 \cdot x - 89 \cdot y = r,$$

oder

$$\text{II.}\quad 89 \cdot x' - 47 \cdot y' = r,$$

endlich auch

$$\text{III.}\quad 89 \cdot x'' + 47 \cdot y'' = r$$

wird.

Um diese drei Aufgaben zu lösen, findet man zuerst (nach §. 52ª. zu Ende) die Zahlen 36 und 19, so daß

$$1)\qquad 47 \cdot 36 - 89 \cdot 19 = 1$$

wird; multiplicirt diese Gleichung mit der gegebenen Zahl r, so daß

$$2)\qquad 47 \times 36 \cdot r - 89 \times 19 \cdot r = r$$

wird, und addirt zu letzterer Gleichung diese:

$$3)\qquad 47 \times 89 \cdot h - 89 \times 47 \cdot h = 0,$$

welche für jedes h richtig ist; schreibt aber das Resultat dieser Addition so:

$$4)\quad 47 \times (89 \cdot h + 36 \cdot r) - 89 \times (47 \cdot h + 19 \cdot r) = r,$$

wenn die Aufgabe I. gelöst werden soll, so daß man jetzt

$$x = 89 \cdot h + 36 \cdot r \text{ und } y = 47 \cdot h + 19 \cdot r$$

gefunden hat, wo statt h jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann.

Soll aber die Aufgabe II. gelöst werden, so schreibt man dasselbe Resultat 4. jetzt so:

$$89 \cdot (-47 \cdot h - 19 \cdot r) - 47 \cdot (-89 \cdot h - 36 \cdot r) = r;$$

oder, wenn man lieber h' statt —h schreibt,

$$5)\ 89 \times (47 \cdot h' - 19 \cdot r) - 47 \times (89 \cdot h' - 36 \cdot r) = r,$$

so daß man für die in II. gesuchten x' und y' hat:

$$x' = 47 \cdot h' - 19 \cdot r \text{ und } y' = 89 \cdot h' - 36 \cdot r,$$

wo statt h' jede ganze Zahl gesetzt werden kann, welche x' und y' positiv macht.

Und soll endlich die Aufgabe III. gelöst werden, so schreibt man das Resultat 4. jetzt so:

$$47 \times (89 \cdot h + 36 \cdot r) + 89 \times (-47 \cdot h - 19 \cdot r) = r;$$

oder, wenn man wiederum h' statt — h schreibt,

$$6)\quad 47 \times (36 \cdot r - 89 \cdot h') + 89 \times (47 \cdot h' - 19 \cdot r) = r,$$

so daß für die in der Aufgabe III. gesuchten x'' und y'' jetzt gefunden ist

$$x'' = 47 \cdot h' - 19 \cdot r \text{ und } y'' = 36 \cdot r - 89 \cdot h',$$

wo statt h' jede ganze Zahl gesetzt werden kann, welche x'' und y'' positiv macht.

Letztere Aufgabe hat zuweilen nicht eine einzige Auflösung, während die Aufgaben I. und II. jedesmal unendlich viele Auflösungen zulassen*).

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Sechstes Kapitel.

Praktische Regeln und Uebungen in der Ziffern- und Buchstaben-Rechnung.

§. 54. Wenn man schreibt z. B. 7a, so ist dies ein Produkt aus 7 und a, so daß, wenn a etwa 4 bedeutet, $7a = 7 \cdot 4 = 28$ ist. — In einem solchen Produkt, wie 7a, nennt man den Ziffern-Faktor 7 häufig den Koefficienten.

Ist die Ordnung der Theile eines Buchstaben-Ausdrucks beliebig, so ordnet man ihn immer möglichst alphabetisch, so daß man lieber $a \cdot b \cdot d$ statt $b \cdot a \cdot d$, lieber $-2a + 3b - 2c$ statt $3b - 2c - 2a$, u. s. w. schreibt.

---

*) Diese Aufgaben nebst allem in diesem Kapitel enthaltenen, bilden den allerersten Anfang derjenigen Lehren, welche unter dem Namen der „unbestimmten Analysis" oder der „höheren Zahlenlehre" zusammengefaßt werden, und welche früher auch die „Analysis des Diophant" genannt wurde, jetzt aber zu einer Höhe ausgebildet worden ist, gegen welche die Leistungen der nächst vergangenen Jahrhunderte nur als sehr geringe erscheinen.

§. 55. Solche Ausdrücke wie 7a und 5a werden addirt und subtrahirt nach §. 14. B. Nr. Nr. 9. 10., nämlich

$$7a + 5a = 12a;\ 7a - 5a = 2a;\ 5a - 7a = -2a.$$

Im Nothfall kann man jeden einfachen Ausdruck als ein Produkt ansehen, nämlich $1 \cdot x$ statt x sich denken. Dies geschieht in folgenden Beispielen:

$$7x + x = 8x;\ ax + x = (a+1) \cdot x;\ ax - x = (a-1) \cdot x.$$

Addirt man ferner $5a - 7b - 8c + d$ zu $-5a + 5b + 7c + 8d$, so erhält man $-2b - c + 9d$. — Subtrahirt man dagegen $7a - 4b - c$ von $6a - 7b + 9c$, so giebt dies $-a - 3b + 10c$.

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{5}{2}b + \tfrac{3}{4}c - (\tfrac{7}{3}a - \tfrac{5}{3}b) - (a - b + \tfrac{5}{8}c) = -\tfrac{17}{6}a + \tfrac{1}{6}b + \tfrac{1}{8}c$$

$$= -\frac{17a - b}{6} + \frac{c}{8} = \frac{-68a + 4b + 3c}{24};$$

u. s. w. f.

§. 56. Hat man 7a mit 5a zu multipliciren, so giebt dies $7 \cdot a \cdot 5 \cdot a$ oder $7 \cdot 5 \cdot a \cdot a$ oder 35aa oder $35a^2$. — Diese letzteren Formen sind es nun, welche man in der Regel zu erhalten wünscht. — So schreibt man

$$6a \times \tfrac{3}{4}b = \tfrac{18}{4}ab = \tfrac{9}{2}ab; \qquad \tfrac{3}{8}b \cdot \tfrac{5}{6}c = \tfrac{5}{16}bc;$$

$$5a \times (-\tfrac{2}{3}b) = -\tfrac{10}{3}ab; \qquad (-\tfrac{5}{6}x) \cdot (-\tfrac{3}{2}y) = \tfrac{5}{4}xy;$$ u. s. f.

§. 57. Kommen unter den Faktoren eines Produkts eine gerade Anzahl subtraktiver Ausdrücke vor, so erhält das Ganze ein (+) Zeichen vor sich; ist aber die Anzahl der subtraktiven Ausdrücke, die mit einander multiplicirt werden sollen, ungerade, so erhält das Ganze ein (—) Zeichen vor sich, z. B.

$$(-a) \cdot (-a) = + a \cdot a = a^2;\ (-a)(-a)(-a) = -a^3,$$

d. h. $(-a)^3 = -a^3$; $(-a)^4 = +a^4$; $(-a)^5 = -a^5$; $(-a)^6 = +a^6$; $(-a)^7 = -a^7$; u. s. w.; u. s. w.;

auch $(-a)^{2n} = +a^{2n}$, dagegen $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$, wenn nur n eine ganze Zahl vorstellt.

§. 58. Für das Multipliciren beachte man noch folgende Uebungs-Beispiele:

$$(2a - 3b + 5c) \cdot (-7d) = -14ad + 21bd - 35cd;$$

$$\left(-\frac{2a}{b} + \frac{4c}{d} - 5d - \frac{g}{h}\right) \cdot \left(-\frac{3ab}{5cd}\right) = \frac{6a^2}{5cd} - \frac{12ab}{5d^2} + \frac{3ab}{c} + \frac{3abg}{5cdh}.$$

Besonders bemerke man

$$(a+b)^2=(a+b)\,(a+b)=a^2+2ab+b^2\,;$$
$$(a+b)^3=(a+b)\,(a+b)\,(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\,;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\,;\qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\,;$$
$$(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2\,;$$
$$(a^2+ab+b^2)\,(a-b)=a^3-b^3\,;\ (a^2-ab+b^2)\,(a+b)=a^3+b^3.$$

Außerdem noch

$$(2a-3b)\,(-4a+b)=-8a^2+14ab-3b^2\,;$$
$$(\tfrac{1}{2}-x)\,(2x-5)=-2x^2+6x-\tfrac{5}{2}\,;$$
$$(\tfrac{1}{2}-x)\,(2x-5)\,(\tfrac{3}{2}-2x)=4x^3-15x^2+14x-\tfrac{15}{4}\,;$$
$$(5-2x)\,(7a-2x)\,(1-x)=35a-(49a+10)\,x+14\,(a+1)x^2-4x^3.$$

§. 59. Soll 7a durch 3b dividirt werden, so erhält man zunächst $\frac{7a}{3b}$, dann aber $\frac{7}{3}\cdot\frac{a}{b}$. — Eben so erhält man, wenn 5ab durch 3b dividirt werden soll, $\frac{5ab}{3b}$ oder $\frac{5}{3}\,\frac{ab}{b}$ oder $\frac{5}{3}\,a$. — Und statt $\frac{5abc}{2b}$ schreibt man lieber $\frac{5}{2}\cdot\frac{abc}{b}$ oder $\frac{5}{2}\,ac$.

Als Beispiele bemerke man noch:

$$\frac{-16a}{8b}=-2\,\frac{a}{b};\quad \frac{-14a}{-4b}=+\tfrac{7}{2}\cdot\frac{a}{b}=\frac{7a}{2b};$$
$$\frac{abcdf}{bdf}=ac\,;\quad \frac{5abc}{-abcdf}=-\frac{1}{df};\quad \frac{3abc}{2pq}:\frac{5b}{7q}=\frac{21}{10}\cdot\frac{ac}{p}.$$

§. 60. Eine algebraische Summe wird durch einen beliebigen Ausdruck dividirt, wenn man jedes einzelne Glied dividirt; z. B.

$$(-6abc-7b+9ac-5d):(-5a)=\tfrac{6}{5}bc+\frac{7b}{5a}-\tfrac{9}{5}c+\frac{d}{a};$$
$$\left(\frac{2a^2}{3b^2}-\frac{7ab}{9cd}+1-\tfrac{5}{8}d\right):\left(-\frac{7a}{3b}\right)=-\frac{2a}{7b}+\frac{b^2}{3cd}-\frac{3b}{7a}+\frac{15bd}{56a}.$$

Ist jedoch der Divisor nicht mehr eingliedrig, sondern selbst schon eine zwei- oder mehrgliedrige algebraische Summe, so muß man das Verfahren der §. §. 20. 21. eintreten lassen. Danach erhält man z. B.

$$\frac{-xy+xz}{y-z}=-x;\qquad \frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b;\qquad \frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b;$$
$$\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a+b+c}=a+b-c\,;\quad \frac{15a^3-14a^2b+24ab^2-7b^3}{3a-b}$$
$$=5a^2-3ab+7b^2.$$

§. 61. Zur Uebung im Rechnen mit Potenzen dienen folgende Beispiele:

$$ax^2 + bx^2 - cx^2 = (a+b-c)\cdot x^2;$$
$$2ax^n - 3bx^n - x^n + 4dx^n = (2a - 3b - 1 + 4d)\cdot x^n;$$
$$\frac{7x^2}{z^2} - \frac{3x^2}{z^2} - 5b\frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} = 5\frac{x^2}{z^2} - 5b\frac{x}{z} = 5\frac{x}{z}\cdot\left(\frac{x}{z} - b\right);$$
$$a^m - 3a^{m-1} = (a-3)\cdot a^{m-1};\quad a^m - a^{m-1}b = a^{m-1}\cdot(a-b).$$

Und auch

$$a^{-p}\cdot a^q = a^{-(p-q)} = \frac{1}{a^{p-q}} = \frac{a^q}{a^p};$$
$$a^{-p}\cdot a^{-q} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q} = \frac{1}{a^{p+q}} = \frac{1}{a^p\cdot a^q};$$
$$5a^3\cdot 7a = 35\cdot a^4;\quad 5a^3\cdot 7a^{-2} = 35a;\quad 5a^{-3}\cdot 7a^2 = \frac{35}{a};$$
$$5a^{-3}\cdot 7a^{-2} = 35\cdot a^{-5} = \frac{35}{a^5};\quad (-2a^{-3})\cdot(-a) = 2a^{-2} = \frac{2}{a^2};$$
$$\frac{18a^3b^{-2}}{5c^nd^p} = \tfrac{18}{5}a^3b^{-2}c^{-n}d^{-p};\quad \frac{10a^{-1}d^n}{9b^{-3}c^{-p}} = \tfrac{10}{9}a^{-1}b^3c^pd^n;$$
$$(2a^3 - ab^2 + 3c^3)\cdot 2a^3b^2 = 4a^6b^2 - 2a^4b^4 + 6a^3b^2c^3;$$
$$(3a^{-3}b - 4b^{-2}c - 5c^{-3}d)\cdot(-5ab^2c^{-1}) = -15\frac{b^3}{a^2c} + 20a + 25\frac{ab^2d}{c^4}.$$
$$(a+b)\cdot(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5;$$
$$(a-b)\cdot(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5;$$
$$(a^6 + 2a^4z^2 + 4a^2z^4 + 8z^6)\,(a^2 - 2z^2) = a^8 - 16z^8;$$
$$(2c^2 + 3bc - b^2)\,(2c^2 - 3bc + b^2) = 4c^4 - 9b^2c^2 + 6b^3c - b^4;$$
$$(1 + an + a^2n^2)\,(-1 + an) = -1 + a^3n^3;$$
$$(a^4 + 4a^3x + 12a^2x^2 + 16ax^3 + 16x^4)\,(a^2 - 4ax + 4x^2) = a^6 - 16a^3x^3 + 64x^6.$$

Ferner

$$a^p : a^q = a^{p-q} = \frac{1}{a^{q-p}};\quad a^{-p} : a^{-q} = a^{-p+q} = \frac{a^q}{a^p};$$
$$6a^3 : 2a^2 = 3a;\quad (-10a^7) : 5a^2 = -2a^5;\quad 10a^7 : 3a^{-4} = \tfrac{10}{3}a^{11};$$
$$\frac{a^m}{a} = a^{m-1};\quad \frac{8a^{-m}}{2a} = 4a^{-(m+1)} = \frac{4}{a^{m+1}};$$
$$\frac{(a+b)^m}{a^m} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^m = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m;\quad \frac{(a-b)^m}{a^m} = \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m;$$
$$\frac{9a^2b^2c - 8b^2cd^2}{4abcd} = \tfrac{9}{4}abd^{-1} - 2a^{-1}bd = \frac{9ab}{4d} - \frac{2bd}{a};$$

$\frac{ab^2-b^2x}{a-x}=b^2$; $\frac{a^4-b^4}{a+b}=a^3-a^2b+ab^2-b^3$;

$\frac{81a^4-16b^4}{3a-2b}=27a^3+18a^2b+12ab^2+8b^3$;

$\frac{a^8-a^2}{a^2-1}=a^2\cdot\frac{a^6-1}{a^2-1}=a^2\cdot(a^4+a^2+1)=a^6+a^4+a^2$;

$\frac{a^5+32b^5}{a-2b}+a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4$;

$\frac{4a^8x^4-9b^8y^4}{2a^4x^2+3b^4y^2}=2a^4x^2-3b^4y^2$;

Endlich

$(a^2b^2cd^3)^4=a^8b^8c^4d^{12}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$;

$\left(\frac{a^2d^3}{bc}\right)^{-2}=\frac{b^2c^2}{a^4d^6}$; $(-a^3)^7=-a^{21}$; $(-a^3)^6=+a^{18}$;

$(-a)^{-2n}=\frac{1}{a^{2n}}$; $(-a)^{2n}=a^{2n}$; $(a^x)^2=a^{2x}$;

$a^{-x\alpha}\cdot a^{z\alpha}=a^{-(x-z)\alpha}=a^{(z-x)\alpha}$;

$(a^{x\alpha}+a^{-x\alpha})^2=a^{2x\alpha}+2+a^{-2x\alpha}$;

$(a^{x\alpha}-a^{-x\alpha})^2=a^{2x\alpha}-2+a^{-2x\alpha}$; u. s. w. f.

§. 62. Ueber das Zerlegen einer algebraischen Summe in Faktoren mag man sich nachstehende Winke bemerken:

1) In einer algebraischen Summe kann man die, allen Gliedern gemeinschaftlichen Buchstaben- und Ziffern-Faktoren heraussetzen, damit alle Glieder der gegebenen algebraischen Summe dividiren, und diese neue algebraische Summe zum zweiten Faktor nehmen; z. B.

$ac-bc=(a-b)\cdot c$; $ac-bc-cd=(a-b-d)\cdot c$;

$a^2b+ab^2=ab\cdot(a+b)$; $3a^2b+3ab^2=3ab\cdot(a+b)$;

$35a^2b-14ab^2-28abc=7ab\cdot(5a-2b-4c)$;

$12a^3x^4+2a^2x^5=2a^2x^4\cdot(6a+x)$; u. s. f.

2) Man kann auch nach und nach verfahren, wie in folgenden Beispielen:

$ac+bd+ad+bc=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$;

$ac+bd-ad-bc=a(c-d)+b(d-c)$

$=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d)$;

$4ac-12bd+6bc-8ad=4a(c-2d)+6b(c-2d)$

$=(4a+6b)(c-2d)=2(2a+3b)(c-2d)$.

3) Sehr wichtig für die Zerlegung in Faktoren ist der Satz $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$. — Hiernach zerlegt sich z. B.

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$; $1 - x^2 = (1+x)(1-x)$;
$25a^2 - \frac{4}{9}b^2 = (5a + \frac{2}{3}b)(5a - \frac{2}{3}b)$; $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$;
$121x^4 - 49 = (11x^2 + 7)(11x^2 - 7)$;
$(a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$.

4) Multiplicirt man $(x+a)$ mit $(x+b)$, so erhält man $x^2 + (a+b)x + ab$. — Soll also umgekehrt $x^2 + px + q$ in zwei solche Faktoren $x+a$ und $x+b$ zerlegt werden, so muß man suchen, die beiden (positiven oder negativen oder allgemeinen) Zahlen a und b so zu finden, daß $a+b=p$ und $ab=q$ wird. Obgleich dies hier nur versuchsweise geschieht, so erwirbt man sich doch bald einige Uebung darin. Danach findet sich

$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$; $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$;
$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$; $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$;
$x^2+2ax+(a^2-b^2)=(x+a-b)(x+a+b)$;
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$; $x^2+3x+\frac{5}{4}=(x+\frac{1}{2})(x+\frac{5}{2})$;
$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$; $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$;
$x^2-\frac{7}{4}x+\frac{5}{8}=(x-\frac{1}{2})(x-\frac{5}{4})$; $x^2-\frac{7}{4}x-\frac{9}{8}=(x+\frac{1}{2})(x-\frac{9}{4})$;

§. 63. Die Zerlegung in Faktoren kann man bei dem Verwandeln der Quotienten (Brüche) in einfachere, mit großem Vortheile anwenden, z. B.

$$\frac{35a^2b-14ab^2-28a^3c}{7a-21a^2x+14ax^3}=\frac{7a(5ab-2b^2-4a^2c)}{7a(1-3ax+2x^3)}=\frac{5ab-2b^2-4a^2c}{1-3ax+2x^3};$$

$$\frac{14a^2-7ab}{10ac-5bc}=\frac{7a(2a-b)}{5c(2a-b)}=\frac{7a}{5c};$$

$$\frac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2}=\frac{2a^2x^4(6a+x)}{3b^2x(6a+x)}=\frac{2a^2x^3}{3b^2};$$

$$\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}=\frac{5a(a+x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{5a}{a-x};$$

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2-1}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n-1)}=\frac{n+1}{n-1};$$

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-2}{x+2};$$

$$\frac{2x^3+5x^2-12x}{7x^3+25x^2-12x}=\frac{2x^2+5x-12}{7x^2+25x-12}=\frac{(2x-3)(x+4)}{(7x-3)(x+4)}=\frac{2x-3}{7x-3};$$

u. s. w. f.

§. 64. Manchmal ist es aber nöthig, einen Quotienten (Bruch) dadurch umzuändern, daß man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl (nicht dividirt, sondern) multiplicirt. Dies ist namentlich der Fall, wenn im Dividenden oder im Divisor, oder gar in beiden, selber noch angezeigte Divisionen

(Brüche) vorkommen, wo man dann mit den einzelnen Divisoren (Nennern) diese Multiplication so lange fortsetzt, bis ein einfacher Quotient erscheint; z. B.

$$\frac{\frac{3}{2}a-x}{2+x}=\frac{3a-2x}{4+2x};\qquad \frac{\frac{3}{2}a-x}{\frac{2}{3}a+x}=\frac{9a-6x}{4a+6x}\ ^{*)};$$

$$\frac{\frac{3}{4}\cdot 7\cdot 6\cdot \frac{5}{8}}{8\cdot \frac{5}{3}\cdot 3\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 9}=\frac{3\cdot 7\cdot 6\cdot \frac{5}{8}}{8\cdot \frac{5}{3}\cdot 14\cdot 5\cdot 9}=\frac{3\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{8\cdot 8\cdot \frac{5}{3}\cdot 14\cdot 5\cdot 9}=\tfrac{3}{320}.$$

Zuweilen multiplicirt man den Dividenden und den Divisor eines Quotienten mit -1, um andere Vorzeichen zu bekommen, während doch der neue Quotient dem alten gleich ist; z. B.

$$\frac{a-b}{1-2x}=\frac{b-a}{2x-1};\qquad \frac{-2a+b-3c}{-1+2x-x^2}=\frac{2a-b+3c}{1-2x+x^2};$$

$$\frac{1-x}{-1+x-x^2}=\frac{x-1}{x^2-x+1};\quad \text{u. s. w. f.}$$

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Siebentes Kapitel.

Der binomische Lehrsatz. Von den absoluten Potenzen, von den absoluten Wurzeln und von den absoluten Logarithmen.

§. 65. Multiplicirt man $a+b$ mit $a+b$, so erhält man

1) $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Multiplicirt man dieses noch einmal mit $a+b$, so ergiebt sich

2) $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Multiplicirt man noch einmal mit $a+b$, und das, was herauskommt, wiederholt mit $a+b$, so findet man bald, weil mit a durchmultiplicirt, und nachgehends auch mit b durchmultiplicirt, letzteres Resultat aber, zum bequemern Zusammenfassen der gleichnamigen Glieder, eingerückt wird,

„daß in jeder folgenden $(\nu+1)^{\text{sten}}$ Potenz von $a+b$, der

---

*) Zu diesen Ausdrücken gehören auch die Bruchs-Brüche; z. B.

$$\frac{(\frac{3}{5})}{8},\quad \text{oder}\quad \frac{3}{(\frac{5}{8})},\quad \text{oder}\quad \frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{5}{8})},\ \text{u. dgl. m.}$$

Man hat aber, wenn man Dividend und Divisor mit den Nennern multiplicirt, sehr schnell statt dieser Bruchs-Brüche, die ihnen gleichen gemeinen Brüche, nämlich $\frac{3}{40}$, $\frac{24}{5}$, $\frac{16}{15}$, u. s. w.

Koeffizient eines jeden n^{ten} Gliedes, die Summe ist der beiden Koeffizienten des n^{ten} und des $(n-1)^{sten}$ Gliedes der nächst vorhergehenden ν^{ten} Potenz von $a+b$."

Danach schreibt man mit großer Leichtigkeit hin:

3) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;

4) $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$;

5) $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$;

u. s. w. f.

Die Koeffizienten eines jeden dieser Potenz-Werthe zur Rechten, sind offenbar von dem Exponenten dieser Potenz abhängig. Man kann daher sich fragen: „Wie sind die Koeffizienten „der m^{ten} Potenz von $a+b$, wenn m eine völlig unbestimmte „ganze Zahl ist, vom Exponenten m abhängig?"

Man hat aber gefunden

$$(\odot)\cdots\ (a+b)^m=a^m+m\cdot a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}\cdot a^{m-2}b^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}\cdot a^{m-3}b^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{m-4}b^4$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot a^{m-5}b^5+\text{etc., etc.}$$

so nämlich, daß, wenn das n^{te} Glied*) $K\cdot a^{m-n}b^n$ ist, dann das nächste $(n+1)^{ste}$ Glied sein muß $K\cdot\frac{m-n}{n+1}\cdot a^{m-(n+1)}b^{n+1}$.

Diese Gleichung $(\odot)$ enthält alle die vorhergehenden Gleichungen (1.—5.) als besondere Fälle in sich. Sie wird die Binomial-Formel oder der binomische Lehrsatz genannt.

Dieser Satz kann als einer der wichtigsten Sätze der gesammten Zahlenlehre angesehen werden. Man muß daher solchen sich wohl in's Gedächtniß prägen. Er wird dadurch bewiesen, daß man zeigt, daß wenn die Gleichung $(\odot)$ für eine bestimmte ganze Zahl $m=h$ gilt, solche auch allemal (indem man mit $a+b$ noch einmal multiplicirt, um aus $(a+b)^h$ die nächste Potenz $(a+b)^{h+1}$ zu erhalten) für die nächste ganze Zahl $m=h+1$ gelten müsse, während dieselbe für $m=2$ mit der obigen Gleichung 1. zusammenfällt, folglich für die bestimmte Zahl $m=2$ gilt,

---

*) Wir nennen immer a^m das allererste Glied, dann aber $m\cdot a^{m-1}b$ das erste, u. s. f. — Nach dieser Zählung hat das n^{te} Glied die Faktoren $a^{m-n}b^n$.

daher auch für $m=2+1=3$, deshalb aber nun auch für $m=3+1=4$, folglich nothwendig auch für $m=4+1=5$, u. s. w. für jede ganze Zahl m wahr sein muß. — Später wird dann gezeigt, daß derselbe Satz auch für gebrochene Werthe von m gilt.

§. 66.

Vom Quadrat-Wurzel-Ausziehen in ganzen Zahlen.

1) Aus den Zahlen von 1 bis 100 findet man die Quadrat-Wurzel mittelst der Tabelle

$a=$	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,
$\sqrt{a}=$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.

2) Hat eine ganze Zahl a (<100) keine genaue Quadrat-Wurzel in ganzer Zahl, so kann man doch immer die nächst kleinere und nächst größere ganze Zahl angeben. — Z. B. für die $\sqrt{61}$ findet man 7 als die nächst kleinere, 8 aber als die nächst größere ganze Zahl; nämlich $7^2<61$ und $8^2>61$.

3) Liegt eine Zahl, z. B. 2046, zwischen 100 und 10000, ist sie also 3- oder 4ziffrig, so ist ihre genaue oder nächst kleinere Quadrat-Wurzel 2ziffrig, also von der Form $a \cdot 10+b$; folglich ist sie selber auf die Form $(a \cdot 10+b)^2$ oder $a^2 \cdot 100+2ab \cdot 10+b^2$ zu bringen. Schneidet man daher von der Rechten zur Linken 2 Ziffern ab, nämlich so: 20|46|, so ist 20 zur Linken ohngefähr a^2, also a ungefähr $\sqrt{20}$ d. h. 4. — Aus $a=4$ folgt $a^2=16$; zieht man daher $a^2 \cdot 100$ d. h. 1600 von 2046 ab, so bleibt 446, und dies ist $=2ab \cdot 10+b^2$, während $2a=8$, also $2ab=8b$ ist. Schneidet man nun von 446 die Ziffer 6 für die Einer ab, so bleiben 44 Zehner ohngefähr für die 2ab oder 8b Zehner, und man findet daher b, wenn man mit 8 in 44 dividirt. Dies giebt $b=5$, also $2ab \cdot 10+b^2=(2a \cdot 10+b) \cdot b=85 \times 5=422$. Zieht man dieses von den obigen 446 ab, so bleibt noch 21 übrig. — Es ist also $a \cdot 10+b$ d. h. $4 \cdot 10+5$, nämlich 45, die nächst kleinste Quadrat-Wurzel aus 2046.

Die Rechnung sieht gewöhnlich so aus:

	20|46|	4 5
	16|	a b
$2a=8$	4 46	
$2ab+b^2=$	4 25	
Rest=	21	

4) Soll aus einer Zahl, welche zwischen 10000 und 1000000 liegt, z. B. aus 204687, die Quadrat-Wurzel gezogen werden, so ist die gesuchte Wurzel selbst zwischen 100 und 1000, also 3ziffrig. Sie kann aber doch wieder in der Form $a \cdot 10 + b$ geschrieben werden, nur daß dann a selbst schon eine zweiziffrige Zahl ist. Deshalb darf man nur das in der vorstehenden Nr. 3. beschriebene Verfahren wiederholen, nämlich:

Zuerst schneidet man von der Rechten zur Linken 2 Ziffern ab, also: 2046|87|,
sucht dann aus der Zahl 2046 zur Linken die nächst kleinste Quadrat-Wurzel (nach Nr. 3.), findet 45 und setzt diese Zahl 45 statt a, zieht $45^2 \cdot 100$ von 204687 ab und behält

2187

übrig. Dann nimmt man (immer genau nach Nr. 3.), $a (= 45)$ doppelt (giebt 90) und dividirt damit in 218 (geht 2mal), so erhält man $b = 2$, also die ganze Quadrat-Wurzel $= 452$. Um aber zu sehen, ob solche genau ist, muß man auch noch $2ab \cdot 10 + b^2 = (2a \cdot 10 + b) b = 1804$ berechnen und von 2187 subtrahiren. Dann erhält man den Rest 383, um welchen die gegebene Zahl 204687 hätte kleiner sein müssen, wenn 452 ihre genaue Quadrat-Wurzel hätte sein sollen.

5) Auf diese Weise kann man aber fortfahren und die Quadrat-Wurzel (die genaue oder die nächst kleinste in ganzen Zahlen) aus jeder noch so vielziffrigen Zahl finden, indem man von der Rechten zur Linken, Klassen von je zwei Ziffern sich bildet und am weitesten zur Linken beginnt, die nächst kleinste Quadrat-Wurzel anzugeben, diese gefundene nächst kleinste Wurzel aber jedesmal benutzt, um aus der Zahl, welche durch Zuziehung der rechts nächst folgenden Klasse von 2 Ziffern entsteht, auf's Neue die nächst kleinste Wurzel zu finden, und so fort, bis zuletzt alle Klassen von 2 Ziffern zugezogen, und aus der gegebenen Zahl selbst die nächst kleinste Quadrat-Wurzel gefunden ist.

§. 67. 1) Zum Kubik-Wurzel-Ausziehen aus ganzen Zahlen bedient man sich zunächst der Tafel

$a^3 = 1,$	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,
$a = 1,$	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,

welche die genaue oder die nächst kleinste Kubik-Wurzel aller Zahlen von 1 bis 1000 liefert.

2) Liegt aber eine Zahl, z. B. 94786, zwischen 1000 und 1000000, so ist ihre Kubik-Wurzel 2ziffrig, d. h. von der Form $a \cdot 10 + b$, die gegebene Zahl selbst also $= (a \cdot 10 + b)^3$. Nun ist aber (nach §. 65. Nr. 2.)

$$(a \cdot 10 + b)^3 = a^3 \cdot 1000 + 3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3.$$

Sondert man daher von der Rechten zur Linken 3 Ziffern der Einer, Zehner und Hunderter ab, schreibt man also

94|786|,

so ist die übrig bleibende Zahl 94 Tausender, ohngefähr die $a^3 \cdot 1000$, also 94 ohngefähr a^3, folglich ist a die nächst kleinste Kubik-Wurzel aus 94, nämlich 4. Hat man aber sonach $a = 4$ gefunden, so berechnet man $a^3 \cdot 1000 = 64000$ und zieht solche Zahl von der gegebenen 94786 ab. Dann ist die Zahl 30786, welche übrig bleibt, noch $= 3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3$. Die 307 Hunderter sind daher ohngefähr die $3a^2b \cdot 100$; also ist 307 ohngefähr $3a^2b$, d. h. 48b, wenn man $3a^2 = 3 \cdot 4^2 = 48$ berechnet. Dividirt man daher mit $3a^2 = 48$ in 307, so erhält man b ohngefähr, nämlich $b = 6$ oder $b = 5$. Berechnet man für $b = 6$, $3a^2b \cdot 100 = 48 \cdot 6 \cdot 100 = 28800$, dann $3ab^2 \cdot 10 = 3 \cdot 4 \cdot 36 \cdot 10 = 4320$ und noch $b^3 = 216$, so machen diese 3 Resultate zusammen 33336 aus, also mehr als man hat. Daher muß man $b = 5$ nehmen und nun $3a^2b \cdot 100 = 48 \cdot 5 \cdot 100 = 24000$, $3ab^2 \cdot 10 = 3000$ und $b^3 = 125$ berechnen, addiren (wodurch man 27125 erhält) und diese Summe von obigen 30786 subtrahiren. Der Rest 3661 zeigt zuletzt, um wieviel die gegebene Zahl 94786 hätte kleiner sein müssen, damit 45 die genaue Wurzel wäre. Zugleich zeigt der vorhergegangene Versuch, daß 46 zu groß ist, daß also 45 die nächst kleinste Kubik-Wurzel aus 94786 ist.

3) Gerade so wie im vorhergehenden §. 66. die Wurzel-Ausziehung, wenn die Wurzel 3- oder mehrziffrig ist, auf das Verfahren im einfachsten Fall, wo sie nur zweiziffrig ist, zurückgeführt worden ist, gerade so muß man auch hier verfahren, um

aus noch so großen gegebenen Zahlen die nächst kleinste Kubik-Wurzel in ganzen Zahlen zu finden.

Anmerkung. Man könnte auf dieselbe Weise, indem man die Formeln des §. 65. Nr. Nr. 3. 4. 5. ꝛc. ꝛc zu Hülfe nimmt, die genaue und nächst kleinste 4te, 5te, 6te, ꝛc. ꝛc. Wurzel aus einer ganzen Zahl finden, d. h. in die dekadische Form geordnet herstellen. Das ganze Verfahren bei jeder dieser Wurzel-Ausziehungen bleibt aber immer nur ein geregeltes Versuchen.

§. 68. Ist m eine positive ganze Zahl, a dagegen eine ganze, gebrochene Zahl oder Null, aber nicht negativ, so existirt allemal eine einzige ganze oder gebrochene positive Zahl (wenn nicht die Null), welche, wenn sie mit der ganzen Zahl m potenzirt wird (nach §. 34.), allemal a wieder giebt; nur hat diese Zahl, wenn sie gebrochen ist, recht häufig unendlich große Zähler und Nenner, so daß sie nicht zu Ende geschrieben, sondern nur gedacht werden kann. In letzterm Falle wird sie dann eine irrationale Zahl genannt; die übrigen ganzen und gebrochenen Zahlen, welche in einer endlichen Menge von Ziffern geschrieben werden können, werden dann rationale Zahlen genannt. — Diese ganze oder gebrochene und entweder rationale oder irrationale Zahl bezeichnet man nun ebenfalls durch das Zeichen $\sqrt[m]{a}$, und nennt solches eine absolute Wurzel. Diese absolute Wurzel und zugleich der Beweis der vorstehenden Behauptung werden auf folgende Art gefunden:

1) Ist a eine ganze Zahl, so wählt man eine beliebig große ganze Zahl z, und verwandelt

$$a \text{ in } \frac{a \cdot z^m}{z^m}.$$

Hernach sucht man von $a \cdot z^m$, welches eine ganze Zahl ist, die nächst kleinste m^{te} Wurzel, d. h. die ganze Zahl w, welche so groß ist, daß

$$w^m < a \cdot z^m \text{ dagegen } (w+1)^m > a \cdot z^m$$

ist, und man hat dann die beiden Brüche

$$\frac{w}{z} \quad \text{und} \quad \frac{w+1}{z}$$

so, daß $\left(\frac{w}{z}\right)^m < a$, dagegen $\left(\frac{w+1}{z}\right)^m > a$ ist, d. h. daß $\frac{w}{z}$ kleiner, dagegen $\frac{w+1}{z}$ größer ist, als die gesuchte, durch $\sqrt[m]{a}$ bezeichnete absolute m^{te} Wurzel aus a. — Weil aber z beliebig groß, also auch immer größer und größer genommen werden kann, so werden diese Grenzen $\frac{w}{z}$ und $\frac{w+1}{z}$, zwischen denen die $\sqrt[m]{a}$ liegt, und welche selbst nur um $\frac{1}{z}$ von einander verschieden sind, der $\sqrt[m]{a}$ so nahe rücken, als man nur immer will, nämlich von ihr um weniger als $\frac{1}{z}$ verschieden sein, während $\frac{1}{z}$ der Null immer näher und näher rückt, je größer z selbst gedacht ist*).

Nimmt man statt z nach und nach 10, oder 100, oder 1000, oder 10000, oder 100000, ꝛc. ꝛc., so hat man den Vortheil, daß diese Grenz-Werthe $\frac{w}{z}$ und $\frac{w+1}{z}$ allemal Decimal-Brüche sind.

Es sei z. B. $\sqrt{21}$ d. h. $\sqrt[2]{21}$ zu finden. Man nehme 1000 statt z, schreibe also, weil das mal $m=2$ ist, statt 21 den ihr gleichen Quotienten $\frac{21 \cdot 1000^2}{1000^2}$ d. h. $\frac{21000000}{1000000}$. Dann suche man von der ganzen Zahl 21000000 die nächst kleinste Quadrat-Wurzel (2te Wurzel) in ganzen Zahlen, welches (nach §. 66.) versuchsweise geschehen kann. Man findet solche $= 4582 = w$;

und $\frac{4582}{1000}$ so wie $\frac{4583}{1000}$

d. h. 4,582 und 4,583

---

*) Die Folge lehrt, daß in den Anwendungen auf die Lehre der Größen statt der wahren $\sqrt[m]{a}$, einer dieser Grenz-Werthe $\frac{w}{z}$ oder $\frac{w+1}{z}$ gesetzt werden kann. In der Theorie dagegen denkt man sich die $\sqrt[m]{a}$ immer genau, obgleich sie in Ziffern nie vollständig angebbar ist.

sind daher zwei, nur um $\frac{1}{1000}$ von einander verschiedene Grenzen, zwischen denen $\sqrt{21}$ liegt.

Hätte man $z = 100000$ genommen, so wäre $21 = \frac{210000000000}{10000000000}$ gesetzt worden, und da die (versuchsweise) gefundene nächst kleinste Quadrat-Wurzel aus 210000000000 jetzt $= 458257$ ist, so hat man die beiden Grenz-Werthe

$\frac{458257}{100000}$ oder 4,58257 und $\frac{458258}{100000}$ oder 4,58258,

welche nur um $\frac{1}{100000}$ von einander, und noch weniger von der wahren Wurzel $\sqrt{21}$ verschieden sind.

Sollte aber $\sqrt[3]{21}$ gefunden werden, so würde man

$21 = \frac{21 \cdot z^3}{z^3}$ setzen, und statt z

etwa 100, oder 1000, oder 100000, ꝛc. ꝛc. nehmen. Für $z = 100$ müßte man (nach §. 67.) die nächst kleinste Kubik-Wurzel aus 21000000 finden (in ganzen Zahlen), nämlich 275, und man hat nun die Grenzen

$\frac{275}{100}$ oder 2,75 und $\frac{276}{100}$ oder 2,76,

zwischen denen die $\sqrt[3]{21}$ liegt, so daß jede dieser beiden Grenzen von ihr um weniger als $\frac{1}{100}$ verschieden ist. — Hätte man $z = 1000000$ genommen, so wären zwei neue Grenzen gefunden worden, welche von einander nur um $\frac{1}{1000000}$, von $\sqrt[3]{21}$ aber um noch weniger verschieden gewesen sein würden.

2) Ist aber a eine gebrochene Zahl, so kann man solche in einen Decimal-Bruch verwandeln mit 2m, oder 3m, oder 4m, oder überhaupt νm Decimal-Stellen, dessen Zähler dann eine ganze Zahl N ist. Man hat dann

$$a = \frac{N}{10^{\nu m}}.$$

Zieht man nun aus N die nächst kleinste m^{te} Wurzel w, so sind

$$\frac{w}{10^{\nu}} \quad \text{und} \quad \frac{w+1}{10^{\nu}}$$

die zwei Decimal-Brüche, welche nur um $\frac{1}{10^\nu}$ von einander verschieden sind, zwischen denen aber die $\sqrt[m]{a}$ liegt *).

Soll z. B. $\sqrt{\frac{7}{5}}$ gefunden werden, so hat man zuerst

$$\frac{7}{5} = 1{,}4 = 1{,}40 = 1{,}4000 = 1{,}400000.$$

Nimmt man nun aus dem Zähler 1400000 die nächst kleinste Quadrat-Wurzel 1183, so hat man

1,183 und 1,184

als die beiden Grenzen, zwischen denen $\sqrt{\frac{7}{5}}$ liegt, so daß jede dieser Grenzen von $\sqrt{\frac{7}{5}}$ um weniger als $\frac{1}{1000}$ abweicht.

Hätte man den Bruch 1,40 genommen, so hätte man statt $\sqrt{140}$ die Zahl 11 bekommen, und man hätte nun die Grenzen

1,1 und 1,2

erhalten, zwischen denen $\sqrt{\frac{7}{5}}$ liegt.

Sollte dagegen $\sqrt[3]{\frac{7}{5}}$ gefunden werden, so würde man wieder zuerst schreiben

$$\frac{7}{5} = 1{,}400 = 1{,}400000 = 1{,}400000000 = \text{etc. etc.};$$

dann z. B. aus dem Zähler 1400000 die nächst kleinste Kubik-Wurzel finden, nämlich 111 — und zuletzt

1,11 und 1,12

als die zwei Grenzen haben, zwischen denen $\sqrt[3]{\frac{7}{5}}$ liegt.

§. 69. Für diese absoluten (und immer eindeutigen) Wurzeln lassen sich nun die Gesetze der Wurzeln des §. 31. auf's Neue beweisen, so lange nur keine gebrochene Zahl als Exponent erscheint.

---

*) Uebrigens konnte man auch, wenn $a = \frac{p}{q}$ ist, a in $\frac{p \cdot q^{m-1}z^m}{(qz)^m}$ verwandeln, dann aus $p \cdot q^{m-1}z^m$ die mte (nächst kleinste) Wurzel v ziehen, und man hatte dann $\frac{v}{qz}$ und $\frac{v+1}{qz}$ als zwei Grenzen, zwischen denen $\sqrt[m]{a}$ d. h. $\sqrt[m]{\frac{p}{q}}$ liegt.

Aus diesen Gesetzen und aus dem §. 68. ziehen wir aber sogleich die nachstehenden praktischen Regeln:

1) Aus einem Bruche wird die Quadrat-, Kubik- und jede höhere Wurzel gefunden, wenn man sie aus Zähler und Nenner zieht.

2) Daher ist es bequem, wenn z. B. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ gefunden werden soll, dafür lieber $\sqrt{\frac{6}{4}}$ oder $\frac{\sqrt{6}}{2}$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ zu schreiben. — Eben so schreibt man statt $\sqrt{\frac{5}{12}}$, lieber $\sqrt{\frac{15}{36}}$ oder $\frac{\sqrt{15}}{6}$, oder $\frac{1}{6}\sqrt{15}$. — D. h. man verwandelt den Bruch, aus welchem die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll (dadurch, daß man Zähler und Nenner desselben mit einer und derselben Zahl multiplicirt), zuvor in einen andern ihm gleichen, dessen Nenner aber eine vollständige Quadrat-Zahl ist, so daß sich die Quadrat-Wurzel aus ihr in einer ganzen Zahl angeben läßt.

3) Aus gleichem Grunde ist es bequem bei dem Kubik-Wurzel-Ausziehen aus einem Bruche, diesen vorher in einen andern ihm gleichen umzuwandeln, dessen Nenner eine vollständige Kubik-Zahl ist.

So schreibt man also

statt $\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ lieber $\sqrt[3]{\frac{20}{8}}$, oder $\frac{\sqrt[3]{20}}{2}$, oder $\frac{1}{2}\sqrt[3]{20}$;

statt $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ lieber $\sqrt[3]{\frac{10}{8}}$, oder $\frac{\sqrt[3]{10}}{2}$, oder $\frac{1}{2}\sqrt[3]{10}$;

statt $\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$ lieber $\sqrt[3]{\frac{112}{64}}$, oder $\frac{\sqrt[3]{112}}{4}$, oder $\frac{1}{4}\sqrt[3]{112}$;

u. s. w. f.

4) Aus demselben Grunde giebt man einem Decimal-Bruch, aus welchem die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll (nöthigenfalls durch Anhängen von Nullen zur Rechten), entweder 2, oder 4, oder 6, oder überhaupt eine gerade Anzahl von Decimal-Stellen, damit sein Nenner 100, oder 10000, oder 1000000, oder $10^{2\nu}$ d. h. eine vollständige Quadrat-Zahl sei, deren Wurzel 10, 100, 1000, oder 10^{ν} ist.

5) Aus demselben Grunde giebt man einem Decimal-Bruch, aus welchem die Kubik-Wurzel gezogen werden soll, 3, 6, 9, 12, d. h. überhaupt eine durch 3 theilbare Anzahl von Decimal-Stellen, damit sein Nenner die vollständige Kubik-Zahl $10^{3\nu}$ werde, deren Kubik-Wurzel 10^{ν} ist.

§. 70. Nun ist man in den Stand gesetzt, den Begriff der Potenz mit gebrochenem Exponenten zu geben. Man nimmt zu dem Ende die Formel Nr. 3. des §. 31., nämlich

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)},$$

denkt sich in ihr a nicht negativ, sonst ganz oder gebrochen, m positiv oder negativ ganz, dagegen n positiv ganz, damit $\frac{m}{n}$ eine positive oder negative gebrochene (oder ganze) Zahl werde; und man versteht nun unter $a^{\frac{m}{n}}$ das, was diese Formel rechts angiebt, nämlich $\sqrt[n]{(a^m)}$ oder auch $(\sqrt[n]{a})^m$, in so fern die Gleichheit dieser letztern beiden Ausdrücke leicht bewiesen werden kann. — Die Zahl a ist deshalb positiv (ganz oder gebrochen) gedacht, weil dann a^m auch immer positiv sein wird, es mag m positiv oder negativ ganz sein, und weil dann $\sqrt{(a^m)}$ (nach §. 68.) allemal wirklich einen bestimmten einzigen (rationalen oder irrationalen) Werth hat.

Man nennt aber diese Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ mit einem gebrochenen (positiven oder negativen) Exponenten $\frac{m}{n}$, und einer absoluten Zahl a zum Dignanden, die gebrochene absolute Potenz. — In so fern zuweilen $\frac{m}{n}$ auch eine ganze Zahl sein kann, so ist in vorstehender Definition auch die ganze absolute Potenz als ein besonderer Fall enthalten, und letztere ist nichts anders als ein besonderer Fall der ganzen Potenz (des §. 34.), nämlich der besondere Fall, wo der Dignand a daselbst nicht mehr ganz allgemein, sondern bereits als eine absolute (d. h. positive, ganze oder gebrochene) Zahl gedacht ist.

Soll also danach $10^{\frac{2}{3}}$ ausgewerthet werden, so muß man entweder $\sqrt[3]{(10^2)}$, d. h. $\sqrt[3]{100}$ sich berechnen oder $\sqrt[3]{10}$ und solche quadriren. Man findet dann $10^{\frac{2}{3}} = 4{,}64\ldots$

§. 71. Für diese „gebrochenen Potenzen" gelten noch die Gesetze der Potenzen des §. 30., nämlich:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ a^m : a^n = a^{m-n};\ (ab)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ und } (a^m)^n = a^{mn};$$

wenn nur immer a und b als positive ganze oder gebrochene Zahlen gedacht, die Exponenten m und n dagegen positiv oder negativ ganz oder gebrochen oder Null sind.

Solches wird aus dem vorstehenden Begriff (§. 70.) mit Leichtigkeit erwiesen.

Der letztern Formel zufolge kann man also die Potenzen

$$10^{\frac{1}{10}},\ 10^{\frac{2}{10}},\ 10^{\frac{3}{10}},\ 10^{\frac{4}{10}},\ 10^{\frac{5}{10}},\ 10^{\frac{6}{10}},\ 10^{\frac{7}{10}} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

dadurch berechnen, daß man

$$10^{\frac{1}{10}},\ \left(10^{\frac{1}{10}}\right)^2,\ \left(10^{\frac{1}{10}}\right)^3,\ \left(10^{\frac{1}{10}}\right)^4,\ \left(10^{\frac{1}{10}}\right)^5,\ \left(10^{\frac{1}{10}}\right)^6,\ \left(10^{\frac{1}{10}}\right)^7, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

berechnet, während $10^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{10} = \sqrt{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[5]{\sqrt{10}}$ ist.

Eben so kann man

$$10^{\frac{2}{100}},\ 10^{\frac{3}{100}}, \text{ ꝛc. ꝛc.}, 10^{\frac{9}{100}}, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

dadurch berechnen, daß man

$$\left(10^{\frac{1}{100}}\right)^2,\ \left(10^{\frac{1}{100}}\right)^3, \text{ ꝛc. ꝛc}, \left(10^{\frac{1}{100}}\right)^9, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

auswerthet, während $10^{\frac{1}{100}} = \sqrt[100]{10} = \sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[5]{10}}}}$ gefunden werden muß.

Man kann daher auch irgend eine ganze oder gebrochene positive Zahl, z. B. 10, mit einem Decimal-Bruch, z. B. 2,47 potenziren. Man hat nämlich zuerst (nach §. 30. Nr. 1.)

$$10^{2,47} = 10^2 \cdot 10^{\frac{4}{10}} \cdot 10^{\frac{7}{100}};$$

und jeder dieser 3 Faktoren kann nach dem Vorstehenden ausgewerthet werden.

§. 72. Durch das Vorhergehende ist man aber wieder in den Stand gesetzt, einen absoluten oder reellen Logarithmen einzuführen und zu berechnen.

Wir verstehen nämlich von nun an unter dem Zeichen $\overset{b}{log}\, a$, welches wir aussprechen, „der Logarithme von a für die Basis b", —

indem wir a und b beide absolut (d. h. positiv ganz oder gebrochen voraussetzen, und hier noch überdies die Basis b größer als 1 uns denken wollen*), — diejenige, allemal existirende, einzige positive oder negative (ganze oder gebrochene), also reelle Zahl z, welche so groß ist, daß $b^z = a$ wird. — Dieselbe Zahl z ist meist irrational, zuweilen aber auch rational, noch seltner eine ganze Zahl. (Vgl. §. 29., wo dieselbe Definition den Worten nach bereits gegeben, während hier die Bedeutung deshalb eine erweiterte ist, weil jetzt die (absolute) Potenz b^z eine erweiterte Bedeutung hat.)

Ist die Basis $b = 10$, so nennt man den Logarithmen noch in's Besondere den Brigg'schen, oder den vulgarischen d. h. den gemeinen. — Ist aber die Basis $b = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ + in infinit., d. h. näherungsweise $b = 2{,}718281828\ldots$**), so wird der Logarithme der Neper'sche, auch der natürliche genannt. Jeder andere als dieser natürliche Logarithme, heißt ein künstlicher; so daß auch der Brigg'sche zu den künstlichen gezählt wird.

§. 73. Die Gesetze der Logarithmen des §. 32. finden auch für die jetzigen erweiterten Begriffe noch eben so statt, weil sie noch genau eben so erwiesen werden können, — oder mit andern Worten, weil hier der Gegensatz zwischen Logarithme und Potenz noch genau eben so festgehalten worden ist, wie im §. 29.

§. 74. Da die Basis $b > 1$ ist, so wächst b^z mit z zugleich. Da ferner $b^0 = 1$ ist, so ist $b^z > 1$, wenn $z > 0$ d. h positiv ist, dagegen $b^z < 1$, wenn $z < 0$, d. h. negativ ist. —

---

*) Es kann die Basis b auch kleiner als 1 genommen werden, jedoch nicht = 1. Da man aber in den Anwendungen nur 2 Arten von Logarithmen gebraucht, nämlich solche, wo die Basis $b = 10$ ist, und solche, wo die Basis b irrational und in ihrem Näherungs-Werthe $= 2{,}718 \ldots$ ist, so ist es nicht unzweckmäßig, wenn wir sogleich $b > 1$ voraussetzen.

**) Diese Zahl wird in der Analysis gewöhnlich durch e bezeichnet.

Und da endlich $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$ immer positiv bleibt, weil b^x immer positiv ist, so folgt:

1) Der Logarithme von 1 ist Null in jedem Logarithmen-System.

2) Der Logarithme aller Zahlen, welche größer als 1 sind, ist positiv, in jedem Logarithmen-System, dessen Basis $b, > 1$ ist.

3) Der Logarithme aller positiven Zahlen, welche < 1 sind (d. h. aller ächten Brüche) ist negativ, für jede Basis b, die > 1.

Von dem Logarithmen einer negativen Zahl kann hier nie die Rede sein, weil solcher in die Definition des §. 72. nicht mit aufgenommen werden konnte.

4) Den Logarithmen eines jeden ächten oder unächten Bruches $\frac{p}{q}$ (also auch eines jeden Decimal-Bruches), findet man (nach §. 32. B. Nr. 2.) allemal sogleich, wenn man von dem Logarithmen des Zählers p, den Logarithmen des Nenners q subtrahirt. — Diese Differenz bleibt positiv, wenn der Bruch $\frac{p}{q}$ ein unächter ist, wird aber negativ, sobald der Bruch $\frac{p}{q}$ ächt sein sollte, so lange nur die Basis $b > 1$ ist.

5) Man muß daher nur noch die Logarithmen aller ganzen Zahlen berechnen. Diese Berechnung ist jedoch so mühsam, daß man die Brigg'schen Logarithmen (für die Basis 10) für die erstern 10000000 ganzen Zahlen ein für allemal in Tabellen gebracht hat, welche Logarithmen-Tafeln heißen *).

§. 75. Für diese Brigg'schen Logarithmen gilt aber in's Besondere noch folgendes:

1) Der Brigg'sche Logarithme von

	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,	2c. 2c.
ist	1,	2,	3,	4,	5,	6,	2c. 2c.

*) Man hat auch die Neper'schen oder natürlichen Logarithmen (für die Basis 2,718....) in Tabellen gebracht, und beide Logarithmen-Systeme sind bezüglich nach den ersten Berechnern solcher Tafeln, Brigg und Neper genannt.

2) Deshalb ist der Brigg'sche Logarithme einer n ziffrigen ganzen Zahl allemal n — 1 Ganze und noch ein ächter Bruch, den man als Decimal-Bruch ausdrückt. — Diese Zahl n — 1 nennt man die Charakteristik oder die Kennziffer; der hinter dieser ganzen Zahl folgende (Decimal-) Bruch dagegen heißt die Mantissa oder schlechtweg die Decimalen.

3) Der Brigg'sche Logarithme eines Decimal-Bruchs wird daher gefunden, wenn man von dem Logarithmen der ganzen Zahl, welche den Zähler bildet, den Logarithmen des Nenners, der (nach Nr. 1.) immer der Anzahl der Decimal-Stellen des gegebenen Decimal-Bruchs gleich kommt, subtrahirt.

4) Auf diese Eigenschaften gründet sich die Einrichtung der Brigg'schen Logarithmen-Tafeln von Vega, Schultz, Callet und Anderen.

§. 76. Der nächste und vorzüglichste Gebrauch, den man von den Logarithmen-Tafeln macht, ist aber folgender:

„Soll irgend ein Ausdruck A z. B. $\sqrt[3]{\left(\frac{b \cdot d^2}{c}\right)}$ in Ziffern ausgewerthet werden, während b, c, d etc. etc. als ganze oder gebrochene Zahlen gegeben sind, so suche man nicht A selbst, sondern allemal *log* A, und suche zu diesem *log* A, die Zahl A selbst in den Tafeln."

Man findet aber nach den Gesetzen des §. 32.

$$log\, A = log \sqrt[3]{\left(\frac{bd^2}{c}\right)} = \tfrac{1}{3} \cdot log \frac{bd^2}{c} \text{ (nach Nr. 4.);}$$

$$log \frac{bd^2}{c} = log(b \cdot d^2) - log\, c \text{ (nach Nr. 2.);}$$

$$log\,(b \cdot d^2) = log\, b + log(d^2) \text{ (nach Nr. 1);}$$

und $log\,(d^2) = 2 \cdot log\, d$ (nach Nr. 3.);

folglich wird

$$log\, A = \frac{log\, b + 2\, log\, d - log\, c}{3};$$

wonach der *log* A leicht zu berechnen ist, da *log* b, *log* d, *log* c in den Tafeln aufgeschlagen werden können.

§. 77. Wir schließen diese Lehre der absoluten Logarithmen überhaupt, und der Brigg'schen Logarithmen in's Besondere, indem wir kurz noch Wege andeuten, auf denen ein Logarithme

z. B. der Brigg'sche Logarithme von 347 berechnet werden könnte.

Da nämlich $log\ 347=2+$ einem ächten Decimal-Bruch ist, so kann man schreiben

$$log\ 347=2+\frac{\beta}{10}+\frac{\gamma}{100}+\frac{\delta}{1000}+\cdots$$

Dann ist aber (nach §. 72.)

$$347=10^{2+\frac{\beta}{10}+\frac{\gamma}{100}+\frac{\delta}{1000}+\cdots}$$

$$=10^2\cdot 10^{\frac{\beta}{10}}\cdot 10^{\frac{\gamma}{100}}\cdot 10^{\frac{\delta}{1000}}\cdot\text{etc. etc.};$$

also, wenn man auf jeder Seite mit 10^2 dividirt

$$3{,}47=10^{\frac{\beta}{10}}\cdot 10^{\frac{\gamma}{100}}\cdot 10^{\frac{\delta}{1000}}\cdot\text{etc. etc.}$$

Man berechnet sich nun $10^{\frac{1}{10}}$ oder $\sqrt[10]{10}$ oder $\sqrt{\sqrt[5]{10}}$, und potenzirt solche Zahl nach und nach mit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, bis man bemerkt, daß man mehr als 3,47 hat. Dies ist bei der 6ten Potenz der Fall. Also nimmt man $\beta=5$, berechnet $(10^{\frac{1}{10}})^5$ oder $10^{\frac{5}{10}}=3{,}162278$, und dividirt die vorstehende Gleichung auf jeder Seite damit, so daß man

$$1{,}0973=10^{\frac{\gamma}{100}}\cdot 10^{\frac{\delta}{1000}}\cdot\text{etc. etc.}$$

erhält. Nun berechnet man sich $10^{\frac{1}{100}}$ oder $\sqrt[100]{10}$ oder $\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}$, und potenzirt das Resultat mit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, bis man wieder mehr als 1,0973 erhält; der nächst kleinste dieser Exponenten (der übrigens dasmal 4 ist) wird nun statt γ gesetzt; man dividirt dann mit $10^{\frac{\gamma}{100}}$ d. h. $10^{\frac{4}{100}}$ oder 1,0965 auf jeder Seite weg, und erhält

$$1{,}0001=10^{\frac{\delta}{1000}}\cdot\text{etc. etc.}$$

Berechnet man nun $10^{\frac{1}{1000}}$ oder $\sqrt[1000]{10}$ oder $\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}$, und potenzirt man das Resultat mit 2, 3, 4, 5, 2c. 2c., so sieht man sogleich, daß $\delta=0$ sein muß, weil $\sqrt[1000]{10}$ oder $10^{\frac{1}{1000}}$ schon mehr ist als 1,0001. —

Auf diese Weise könnte man fortfahren und $log\ 347=2{,}540\cdots$ mit immer mehr Decimal-Stellen finden.

Eine zweite Art, einen Logarithmen (z. B. den von 347) ebenfalls ohne Kenntnisse der höhern Analysis zu berechnen, ist folgende:

Man hat

$$\odot)\cdots \qquad log\ \sqrt{p \cdot q} = \frac{log\ p + log\ q.}{2}$$

Setzt man nun statt p und q Grenz-Werthe, zwischen denen die Zahl 347 liegt, z. B. 100 und 1000, so findet man $\sqrt{p \cdot q} = 316{,}2 \cdots$ und dann (nach $\odot$)

$$log\ 316{,}2 \cdots = \frac{2+3}{2} = 2{,}5.$$

Da nun 347 zwischen dieser Zahl 316,2 und 1000 liegt, so setzt man diese zwei (näheren) Grenzen statt p und q in die Formel ($\odot$), erhält $\sqrt{p \cdot q} = 562, \cdots$ und von dieser Zahl den Logarithmen mittelst der Formel ($\odot$) genau. Weil aber jetzt 316,2 und 562, ⋯ nähere Grenzen sind, zwischen denen 347 liegt, so setzt man diese statt p und q in die Formel ($\odot$), und findet wieder eine Zahl statt $\sqrt{p \cdot p}$, welche der 347 näher liegt, und deren Logarithme die Formel ($\odot$) genau liefert. – Fährt man aber so fort, statt p und q jedesmal die nächsten Grenzen zu setzen, deren Logarithmen bekannt sind und zwischen denen 347 liegt, so bekommt man immer neue Werthe von $\sqrt{p \cdot q}$, welche der gegebenen Zahl 347 immer noch näher rücken und deren Logarithme durch die Formel ($\odot$) genau gefunden wird. Zuletzt kommt man auf eine Zahl, welche mit 347 ganz nahe zusammenfällt, und deren Logarithme gefunden ist.

Beide Methoden gehören jedoch jetzt nur noch in die Geschichte der Mathematik, da man in der neuern Zeit die Logarithmen mittelst der Lehren der höhern Analysis viel einfacher und sicherer ausrechnet.

Wir bemerken nur noch, wie vermöge der Lehren der höheren Analysis feststeht, daß die Gleichung (Proportion)

$$(a-c):(b-c) = (log\,a - log\,c):(log\,b - log\,c)$$

desto näher wahr ist, je größer die Zahl a ist, und je weniger dabei die Zahlen b und c von ihr verschieden sind. — Danach berechnet man, wenn *log* a und *log* c bekannt sind, den Logarithmen einer zwischen a und c liegenden Zahl b ziemlich genau und ungemein leicht*).

---

*) Mittelst dieses Satzes berechnet man (in den gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln von Callet, Schultz oder Vega) die sogenannten Proportional-Theile. Es sei z. B. $c = 256970$, $a = 256980$ und $b = 256976$, so hat man $log\ c = log\ 256970$ und $log\ a = log\ 256980$ aus der Tafel; ferner ist $a - c = 10$, $b - c = 6$; demnach hat man $10:6 = (log\,a - log\,c):(log\,b - log\,c)$ d. h. $(log\,b - log\,c) = \frac{6}{10}\cdot(log\,a - log\,c)$. Da nun $log\,a - log\,c$ bekannt ist, so ist auch das Proportional-Theilchen $log\,b - log\,c$ gefunden, welches zu dem bekannten *log* c noch hinzu addirt werden muß, wenn man *log* b haben will.

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Achtes Kapitel.

Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem und mit mehreren Unbekanten.

§. 78. Wenn eine Gleichung, wie z. B.

$$a \cdot x = b,$$

nur unter der Voraussetzung wahr ist, daß einer der Buchstaben x einen völlig bestimmten Ausdruck vorstellt (z. B. $\frac{b}{a}$, so daß die Gleichung eigentlich die, als richtig sich erweisende Gleichung $a \cdot \frac{b}{a} = b$ ist), so nennt man solche eine Bestimmungs-Gleichung, in so fern sie in der Regel dazu dient, den unter x vorgestellten unbekannten Ausdruck zu bestimmen. — Die eigentliche, wahre Gleichung wird dann im Gegensatz dieser Bestimmungs-Gleichung auch eine identische genannt.

Man kann sich solche Bestimmungs-Gleichungen „mit einem, auch mit mehreren Unbekannten" denken.

§. 79. Eine Bestimmungs-Gleichung wird nach dem Unbekannten x geordnet, wenn man jede Seite derselben so lange multiplicirt, bis sie keine angezeigte Division mehr hat (dies Geschäft nennt man das „Wegschaffen der Brüche"), — dann alle Klammern, die den Unbekannten x enthalten, auflöst, so daß links und rechts bloß algebraische Summen vorkommen (die jedoch auch nur ein einziges Glied haben, auch = 0 sein können); — dann auf jeder Seite der Gleichung so lange einzelne der Glieder subtrahirt, bis auf der einen Seite bloß Glieder vorkommen, welche x enthalten, auf der andern Seite bloß Glieder, welche kein x enthalten*); zuletzt aber alle Glieder zusammenfaßt, welche den

---

*) Dies geschieht am bequemsten dadurch, daß man solche Glieder auf der einen Seite der Gleichung bloß wegläßt, sie dagegen mit dem entgegengesetzten Vorzeichen (+, —) auf die andere Seite der Gleichung schreibt. — Dadurch sind nämlich dieselben Glieder auf jeder der

Faktor x haben, aber auch alle zusammenfaßt, welche den Faktor x^2 haben, u. s. w. f.

Hätte man z. B. die Gleichung

$$\frac{3-2x}{4}-\frac{x-2}{4x-1}=8,$$

so würde man zuerst mit $4x-1$ multipliciren und erhalten

$$\frac{-8x^2+14x-3}{4}-(x-2)=32x-8;$$

dann mit 4 multipliciren, wodurch man erhält

$$-8x^2+14x-3-(4x-8)=128x-32;$$

hernach die Klammern auflösen, nämlich schreiben

$$-8x^2+14x-3-4x+8=128x-32;$$

nun die Glieder absondern, d. h. schreiben

$$-8x^2+14x-4x-128x=-32+3-8;$$

zuletzt aber zusammenfassen, so daß man hat

$$-8x^2-118x+37=0,$$

oder, indem man links und rechts mit -1 multiplicirt,

$$8x^2+118x-37=0.$$

Diese letztere Gleichung ist nun die geordnete.

Bestimmungs-Gleichungen, welche sich so ordnen lassen, wie eben bemerkt, nennt man algebraische; die übrigen heißen transcendente. —

Zu den letztern d. h. zu den transcendenten gehören z. B. die Gleichungen

$$2^x-3=8x; \quad \text{oder } log\,(x+3)-7=x;$$

u. dgl. mehr.

Die algebraischen Gleichungen nennt man nach ihrem Unbekannten x, einfache, oder vom ersten Grade, wenn sie, geordnet, nicht x^2 und auch nicht höhere Potenzen von x haben, z. B. $7x=5$. — Sie heißen quadratische oder vom zweiten Grade, wenn sie auch noch x^2 enthalten, nachdem sie geordnet sind, wie z. B. $4x^2-7x=11$. — Sie heißen kubische oder vom dritten Grade, wenn sie die Form annehmen $a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x=d$. Sie heißen überhaupt höhere Gleichungen vom 4^{ten}, 5^{ten},.... n^{ten} Grade, wenn sie, geordnet, noch Glieder mit x^4, x^5,.... x^n behaftet, enthalten.

---

beiden Seiten der Gleichung subtrahirt; daher ist die neue Gleichung wieder richtig.

§. 80. Findet man bei einer Gleichung, z. B. bei

$$1)\ \frac{a-x+c}{bx} - c = d,$$

nachdem sie geordnet ist, nachdem also nach und nach die Gleichungen

$$2)\ a-x+c-bcx=bdx,$$
$$3)\ a+c=bdx+bcx+x,$$
$$4)\ a+c=(bd+bc+1)\cdot x$$

daraus abgeleitet sind, — daß sie eine einfache ist, so wird sie vollends aufgelöst, wenn eine solche noch mit dem Koeffizienten von x (der jedoch nach §. 16. nie Null sein darf)*) dividirt wird. — Dadurch erhält man (aus der 4.)

$$5)\ \frac{a+c}{bd+bc+1} = x$$

und da diese Gleichung offenbar eine richtige wird, wenn man rechts statt x den Ausdruck zur Linken setzt, so folgt, daß auch die Gleichung 1. schon eine richtige sein muß, wenn $\frac{a+c}{bd+bc+1}$ statt x gesetzt wird. In der Gleichung 5. sieht man also den Unbekannten x gefunden.

§. 81. Sind zwei einfache Gleichungen mit zweien Unbekannten x und z — sind z. B. die Gleichungen

$$1)\ ax-bz=c \quad \text{und} \quad 2)\ mx+pz=d$$

aufzulösen, d. h. soll man die Ausdrücke finden, welche statt x und statt z gesetzt werden müssen, damit beide Gleichungen (1. und 2.) zugleich in richtige (identische) Gleichungen übergehen, so muß man vor allen Dingen einen der beiden Unbekannten, z. B. z, eliminiren oder wegschaffen, d. h. aus beiden Glei-

---

*) Wäre $bd+bc+1=0$, so hätte die Gleichung, weil dann $(bd+bc+1)\cdot x=0\cdot x=0$ sein würde, gar kein x, könnte daher auch nicht mehr zur Bestimmung von x verwandt werden. — Sehr unrichtig aber wäre es, wenn man aus $o\cdot x=p$, folgern wollte $x=\frac{p}{o}$ und dann unter $\frac{p}{o}$ das Unendlich-Große sich dächte.

chungen eine neue Gleichung ableiten, welche z nicht mehr, sondern nur noch x enthält.

Dazu hat man nachstehende Eliminations-Methoden:

A. Die Substitutions-Methode. — Sie besteht darin, daß man die eine Gleichung nach z auflöst und den erhaltenen Ausdruck in die andere Gleichung statt z substituirt. — Die Gleichung 1. giebt aber

$$3)\qquad z = \frac{ax - c}{b};$$

und die andere 2. giebt nun

$$\text{I.}\quad mx + p \cdot \frac{ax - c}{b} = d,$$

als die gesuchte Eliminations-Gleichung (ohne z).

B. Die Kombinations-Methode. — Sie besteht darin, daß man aus beiden gegebenen Gleichungen (1. und 2.) z findet, und beide Ausdrücke einander gleich setzt. Dies giebt

$$\text{II.}\quad \frac{ax - c}{b} = \frac{d - mx}{p}$$

zur gesuchten Eliminations-Gleichung (ohne z).

C. Die Additions- und Subtraktions-Methode (auch die englische genannt). — Sie besteht darin, daß man jede der beiden Gleichungen (1. und 2.) mit etwas multiplicirt, diesen Faktor für jede aber so heraussucht, daß die neuen Gleichungen einerlei Koeffizienten von z haben. Um diese Faktoren zu finden, muß man daher wesentlich so verfahren, wie dort (§. 24. II.), wo zwei Brüche unter einerlei Benennung gebracht werden sollen. — Man multiplicirt in dem gegenwärtigen Beispiele die Gleichung 1. mit p, die Gleichung 2. dagegen mit b, und man erhält

$$4)\qquad ap \cdot x - bp \cdot z = cp$$

$$5)\qquad bm \cdot x + bp \cdot z = bd.$$

Addirt man nun diese beiden Gleichungen zu einander, so erhält man

$$\text{III.}\quad (ap + bm) \cdot x = cp + bd$$

als die gesuchte Eliminations-Gleichung. (Man würde subtra-

hirt haben, wenn die beiden Glieder $bp \cdot z$ einerlei Vorzeichen gehabt hätten.)

D. Die französische Methode. — Sie besteht darin, daß man eine der beiden gegebenen Gleichungen, z. B. die 2., mit einem beliebigen Ausdruck α multiplicirt und zur ersten (1.) addirt, so daß man diese neue Gleichung

$$6)\quad (a+\alpha m)\cdot x+(-b+\alpha p)\cdot z=c+\alpha\cdot d$$

erhält, welche für jedes α gilt, welche daher der Repräsentant von unendlich vielen Gleichungen ist, die für die verschiedenen Werthe von α aus ihr hervorgehen. Denkt man sich nun α so genommen, daß der Koeffizient $-b+\alpha p$ von z (in der 6.) der Null gleich wird, so hat man für diesen bestimmten Werth von $\alpha\left(=\frac{b}{p}\right)$, der aus $-b+\alpha\cdot p=0$ hervorgeht, die Gleichung

$$IV.\quad (a+\alpha m)\cdot x=c+\alpha\cdot d, \text{ oder } (a+\frac{b}{p}\cdot m)\cdot x=c+\frac{b}{p}\cdot d.$$

Hätte man den Unbekannten x eliminiren wollen, so hätte man nur (in 6.) dem α einen andern, nämlich den Werth geben dürfen, welcher $a+\alpha\cdot m=0$ macht, und welcher $=-\frac{a}{m}$ ist.

Ist aber mittelst einer dieser 4 Eliminations-Methoden (oder mittelst irgend einer 5ten Methode) der eine Unbekannte z eliminirt oder weggeschafft, so daß man irgend eine der Eliminations-Gleichungen (I. II. III. oder IV.), (oder irgend eine 5te) erhalten hat, die nur noch x enthält, so löst man solche, wenn sie zuerst nach x geordnet ist, vollends nach x auf. Man findet dann

$$7)\quad x=\frac{cp+bd}{ap+bm}.$$

Um nun den Werth von z dazu zu finden, setzt man diesen Werth von x (aus 7.) in irgend eine der Gleichungen, welche noch z enthalten, statt x, und löst diese letzt erhaltene Gleichung vollends nach z auf. — Setzt man z. B. diesen Werth (aus 7.) statt x in die Gleichung 3., so erhält man

$$8)\quad z=\frac{a\cdot\frac{cp+bd}{ap+bm}-c}{b}=\frac{ad-cm}{ap+bm}.$$

Diese Werthe für x und z (aus 7. u. 8.) sind es nun, welche die beiden gegebenen Gleichungen (1. und 2.) zugleich identisch machen; denn sie machen solche zwei Gleichungen identisch, welche aus 1. und 2. abgeleitet sind, aus denen daher die 1. und 2. selbst wieder abgeleitet werden können, so daß die 1. und 2. mit jenen zugleich, richtige Gleichungen sein müssen.

§. 82. Sollen 3 einfache Gleichungen mit dreien Unbekannten x, y, z aufgelöst werden, z. B. die Gleichungen

1) $ax + by + cz = d,$

2) $a'x + b'y + c'z = d',$

3) $a''x + b''y + c''z = d'',$

so eliminire man aus diesen 3 Gleichungen den einen Unbekannten, z. B. z, d. h. man verschaffe sich zwei neue Gleichungen ohne z, bloß zwischen x und y. Dies geschieht:

A. Durch die Substitutions-Methode, indem man aus der einen Gleichung

4) $$z = \frac{d - by - ax}{c}$$

findet und diesen Werth statt z in die beiden übrigen Gleichungen substituirt; oder

B. Durch die Kombinations-Methode, indem man z aus allen 3 Gleichungen findet, also auch noch

5) $z = \frac{d' - b'y - a'x}{c'}$ und 6) $z = \frac{d'' - b''y - a''x}{c''}$,

und dann alle 3 Ausdrücke für z, einander gleich setzt; oder

C. Durch die englische Methode (Add. und Subtr. Methode). Diese besteht darin, daß man entweder (genau nach §. 81. C.) den Unbekannten z zuerst aus 1. und 2., dann auch aus 1. und 3., oder aus 2. und 3. eliminirt, — oder indem man aus den Koeffizienten c, c' und c'' eben so einen General-Koeffizienten N sucht, wie wenn c, c', c'' Nenner von Brüchen wären und ein General-Nenner gesucht würde, — dann mit jedem der Koeffizienten c, c', c'' in diesen General-Koeffizienten N dividirt, und mit dem Resultat die betreffende Gleichung multiplicirt. Dadurch bekommt man 3 neue Gleichungen, in denen die

mit z behafteten Glieder einerlei Koeffizienten haben, und welche man paarweise subtrahirt oder addirt.

Hat man aber auf einem dieser 3 Wege, oder auf einem 4^{ten}, z eliminirt, d. h. zwei Gleichungen zwischen x und y sich verschafft ohne z, so löst man diese beiden Gleichungen (nach dem vorhergehenden §. 81.) auf, und findet also x und y. — Setzt man zuletzt diese Werthe statt x und y in irgend eine der Gleichungen, die noch z haben, so kann man sogleich z noch dazu finden.

§. 83. Man kann aber auch, um dieselben 3 gegebenen Gleichungen (1.—3. des §. 82.) aufzulösen, sich dazu der durch §. 81. D. eingeleiteten Methode bedienen, um sogleich zwei der 3 Unbekannten auf einmal zu eliminiren. Zu dem Ende multiplicirt man die 2^{te} der 3 Gleichungen 1.—3. mit α, die 3^{te} mit β, addirt alle drei und erhält

$$7)\quad (a+a'\alpha+a''\beta)\cdot x+(b+b'\alpha+b''\beta)\cdot y \\ +(c+c'\alpha+c''\beta)\cdot z=d+d'\alpha+d''\beta.$$

Hernach denkt man sich α und β so, daß die Koeffizienten von y und z der Null gleich werden, d. h. man setzt

$$8)\quad b+b'\cdot\alpha+b''\cdot\beta=0 \quad \text{und} \quad 9)\quad c+c'\cdot\alpha+c''\cdot\beta=0,$$

findet daraus die beiden Unbekannten α und β (nach §. 81.) und hat zuletzt

$$10)\quad x=\frac{d+d'\cdot\alpha+d''\cdot\beta}{a+a'\cdot\alpha+a''\cdot\beta}\left\{\begin{array}{l}\text{für diese (aus 8. und 9.) ge-}\\ \text{fundenen Werthe von } \alpha \text{ und } \beta.\end{array}\right.$$

Setzt man aber

$$11)\quad a+a'\cdot\alpha+a''\cdot\beta=0 \quad \text{und} \quad 12)\quad c+c'\cdot\alpha+c''\cdot\beta=0,$$

und findet man daraus zwei andere Werthe von α und β, so hat man für diese neuen Werthe von α und β

$$13)\qquad y=\frac{d+d'\cdot\alpha+d''\cdot\beta}{b+b'\cdot\alpha+b''\cdot\beta}.$$

Ganz analog findet man zuletzt auch z.

§. 84. Sollen 4 einfache Gleichungen zwischen 4 Unbekannten aufgelöst werden, so muß man einen der 4 Unbekannten eliminiren, d. h. drei neue Gleichungen sich verschaffen, welche nur noch drei der Unbekannten enthalten, diese Gleichungen aber dann (nach §. 82. oder §. 83.) auflösen. — Hat man sonach

die Werthe dreier Unbekannten gefunden, so setzt man solche in irgend eine der Gleichungen, welche auch noch den 4ten Unbekannten enthalten, und findet aus dieser Gleichung vollends diesen 4ten Unbekannten.

Man kann aber (ganz analog mit §. 83.) mittelst der französischen Eliminations-Methode sogleich immer 3 der Unbekannten auf einmal eliminiren, und den 4ten dann finden. Dieser 4te kann aber nach und nach jeder der 4 Unbekannten werden.

Ueberhaupt kann man auf diesen Wegen n einfache Gleichungen zwischen n Unbekannten auflösen.

Hätte man daher zwischen n Unbekannten weniger als n, nämlich nur n—m Gleichungen, so würde man auch nur n — m der Unbekannten finden können in die m übrigen ausgedrückt, so daß diese letztern m übrigen Unbekannten ganz unbestimmt blieben. Sollten aber doch alle n Unbekannten bestimmt werden, so würde man die Aufgabe eine unbestimmte nennen, und die m übrigen Unbekannten könnten dann ganz willkührliche Werthe annehmen, und zwar immer andere und andere. Sind in den Anwendungen noch Nebenbedingungen gegeben, welche die Unbekannten zu erfüllen haben (sollen letztere z. B. nur ganze Zahlen, oder gar nur positive ganze Zahlen werden, wie dies in den Aufgaben des §. 53. der Fall war), so muß man eigene Kunstgriffe anwenden, um seinen Zweck zu erreichen, die für jede einzelne Aufgabe verschieden sein können und welche die „unbestimmte Analysis" zu lehren hat.

Hätte man aber zwischen n Unbekannten mehr als n Gleichungen, so würde man nur n dieser Gleichungen nehmen und aus ihnen die Unbekannten finden. Dann würde man die gefundenen Werthe der n Unbekannten in die übrigen der gegebenen Gleichungen substituiren. Würden diese letzteren dann alle identisch, so wären solche nur als abgeleitete Gleichungen der n erstern anzusehen (deren man offenbar unzählig viele bilden kann, indem man die n Gleichungen mit einander beliebig verbindet). Würden aber diese letztern nicht zu gleicher Zeit identisch, ja nur eine einzige derselben nicht, so wäre dies ein Beweis, daß es keine Werthe der Unbekannten giebt, welche allen gegebenen

Gleichungen zu gleicher Zeit genügen könnten. Die Aufgabe selbst, welche zu diesen vielen Gleichungen geführt hat, heißt aber dann *überbestimmt*.

Es kann sich natürlich auch treffen, daß, wenn zwischen n Unbekannten gerade n Gleichungen gegeben sind, die Aufgabe doch noch *unbestimmt* ist, in so fern eine oder einige der n Gleichungen nur Folgerungen aus den übrigen, also in der That weniger als n „von einander unabhängige" Gleichungen gegeben sind. Dies zeigt sich in der Auflösung, welche dann in der That nur so viele der Unbekannten (in die übrigen ausgedrückt) liefert, als „von einander unabhängige" Gleichungen vorhanden sind.

Anmerkung. Endlich ist in Bezug auf die Auflösung der Gleichungen noch zu bemerken, daß es ganz einerlei ist, ob man die *gegebenen* Gleichungen unmittelbar so behandelt, wie in den vorhergehenden §. §. beschrieben worden ist, oder ob man aus den gegebenen Gleichungen zuvor sich neue Gleichungen bildet, dann von allen Gleichungen so viele auswählt, als man Unbekannte hat, und diese dann auflöst. Freilich bleibt die Hauptsache immer die, daß die *gegebenen* Gleichungen *alle* wirklich identisch werden, mittelst der gefundenen Werthe der Unbekannten, so daß man allerdings, wo man noch einige Ursache des Zweifels zu haben vermeint, die Probe noch anstellen, nämlich die gefundenen Werthe der Unbekannten *in alle gegebenen* Gleichungen wirklich substituiren und zuletzt zusehen muß, ob letztere auch wirklich alle identisch werden.

Hätte man z. B. die 4 Gleichungen

$$2x+2y+2z=7, \qquad 3x+3y+3t=8$$
$$x+z+t=5 \quad \text{und} \quad 4y+4z+4t=12$$

aufzulösen, so würde man, statt genau die oben gegebenen Vorschriften zu befolgen, lieber die Gleichungen vorher dividiren, so daß man statt ihrer erhielte

$$1)\ x+y+z=3\tfrac{1}{2}$$
$$2)\ x+y+t=2\tfrac{2}{3}$$
$$3)\ x+z+t=5$$
$$4)\ y+z+t=3.$$

Dann könnte man alle 4 Gleichungen addiren und die Summe durch 3 dividiren; dies gäbe

$$5)\ x+y+z+t=4\tfrac{13}{18}.$$

Zuletzt würde man von dieser Gleichung (5.) nach und nach jede der 4 Gleichungen 1.—4. subtrahiren; und man fände

$$t=1\tfrac{2}{9},\ z=2\tfrac{1}{18},\ y=-\tfrac{5}{18} \text{ und } x=1\tfrac{13}{18}.$$

§. 84a.

Einige Aufgaben aus der unbestimmten Analysis.

I. Es sei die einzige Gleichung

$$1)\qquad 89x+47y=1000$$

gegeben, und es seien alle Werthe von x und y zu finden, welche ihr genügen, welche aber zugleich positive ganze Zahlen sind.

Man findet zunächst (aus 1.)

$$2)\ y=\frac{1000-89x}{47}=21-x+\frac{13-42x}{47},$$

wo man alle ganzen x, die in $\frac{89}{47}x$ stecken, herausgeholt hat. Zu jeder ganzen Zahl, welche statt x gesetzt wird, erhält man nun (aus 2.) für y gewiß auch eine ganze Zahl, so oft für denselben Werth von x, der Quotient $\frac{13-42x}{47}$ irgend einer ganzen Zahl h gleich wird. Aus

$$3)\qquad \frac{13-42x}{47}=h$$

folgt aber

$$4)\ x=\frac{13-47h}{42}=-h+\frac{13-5h}{42},$$

so daß x allemal eine ganze Zahl wird, so oft man statt h eine solche ganze Zahl setzt, welche

$$5)\qquad \frac{13-5h}{42}=h'$$

macht, wo h′ irgend eine ganze Zahl ist. Daraus folgt aber

$$6)\ h=\frac{13-42h'}{5}=2-8h'+\frac{3-2h'}{5},$$

so daß auch h mit h′ zugleich, allemal eine ganze Zahl wird, so oft

$$7)\qquad \frac{3-2h'}{5}=h'' \text{ eine ganze Zahl ist.}$$

Dies giebt

8) $h' = \frac{3-5h''}{2} = 1 - 2h'' + \frac{1-h''}{2}$,

also daß auch h′ mit h″ zugleich, allemal eine ganze Zahl wird, wenn nur

9) $\frac{1-h''}{2} = h'''$ eine ganze Zahl ist.

Aus dieser Gleichung folgt aber endlich

10) $h'' = 1 - 2h'''$,

so daß h″ gewiß eine ganze Zahl ist, sobald statt h‴ irgend eine ganze Zahl gesetzt wird.

Drückt man nun alles in die beliebig zu nehmende ganze Zahl h‴ aus, so erhält man noch

11) $h' = -1 + 5h'''$ (aus 8.),

12) $h = 11 - 42h'''$ (aus 6.),

13) $x = -12 + 47h'''$ (aus 4.)

und 14) $y = 44 - 89h'''$ (aus 2.).

Daß diese Werthe statt x und statt y in die Gleichung 1. gesetzt, ihr genügen, während h‴ ganz unbestimmt bleibt, während man also statt h‴ setzen kann, was man nur immer will, fällt in die Augen; daß man statt x und y jedesmal ganze Zahlen bekommt, so oft statt h‴ Null oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl gesetzt wird, ist ebenfalls augenfällig; damit aber x eine positive ganze Zahl werde, müßte man h‴ positiv nehmen und jeder positive ganze Werth von h‴ macht wiederum y negativ. Folglich giebt es kein einziges zusammengehöriges Paar ganzer und positiver Zahlen, welche statt x und statt y gesetzt, der gegebenen Gleichung 1. genügen könnte.

Dasselbe zeigt auch die Auflösung derselben Aufgabe im §. 53. Nr. III., wo man für $r = 1000$

$$z = 47 \cdot h' - 19000 \quad \text{und} \quad y = 36000 - 89 \cdot h'$$

hat, welche Werthe aber für $h' = 404 + h'''$, in

$$x = 47 \cdot h''' - 12 \quad \text{und} \quad y = 44 - 89 \cdot h'''$$

übergehen.

II. Hätte man diese andere Gleichung

1) $89x - 47y = 1000$

lösen wollen in ganzen positiven Zahlen, so hätte dasselbe Verfahren nach und nach geliefert

$$y=\frac{89x-1000}{47}=x-21+\frac{42x-13}{47};$$

$$\frac{42x-13}{47}=h,\quad \text{also } x=\frac{47h+13}{42}=h+\frac{5h+13}{42}$$

$$\frac{5h+13}{42}=h',\quad \text{also } h=\frac{42h'-13}{5}=8h'-2+\frac{2h'-3}{5}$$

$$\frac{2h'-3}{5}=h'',\quad \text{also } h'=\frac{5h''+3}{2}=2h''+1+\frac{h''+1}{2}$$

$$\frac{h''+1}{2}=h''',\quad \text{also } h''=2\cdot h'''-1.$$

Alles in h''' ausgedrückt:

$$\begin{aligned} h' &= 5h'''-1 \\ h &= 42h'''-11 \\ x &= 47h'''-12 \\ y &= 89h'''-44. \end{aligned}$$

Diese Werthe von x und y geben aber lauter positive ganze Zahlen, so oft statt h''' irgend eine positive ganze Zahl gesetzt wird.

Dies Resultat stimmt auch wieder mit dem der Nr. II. des §. 53. für $r=1000$. Jenes Resultat giebt nämlich

$$x=47\cdot h'-19000 \quad \text{und} \quad y=89\cdot h'-36000,$$

geht aber für $h'=404+h'''$

in die gegenwärtige Form

$$x=47h'''-12 \quad \text{und} \quad y=89h'''-44$$

über, welche $x=35,\ 82,\ 129,\ 176,$ u. s. w.

und dazu $y=45,\ 134,\ 223,\ 312,$ u. s. w. liefert.

Der Lehre der unbenannten Zahlen

Neuntes Kapitel.

Von den quadratischen Gleichungen. Von den allgemeinen und den imaginären Quadrat-Wurzeln. Von den kubischen und anderen, auch höheren Gleichungen.

§. 85. Ein reine quadratische Gleichung

1) $$a\cdot x^2=b$$

wird aufgelöst, indem man solche durch a dividirt, also diese:

2) $$x^2=\frac{b}{a}$$

daraus macht, so daß dann

$$3)\qquad x=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

wird. — Dies setzt jedoch voraus, daß $\frac{b}{a}$ eine absolute (positive ganze oder gebrochene) Zahl sei.

I. Ist nun $\frac{b}{a}$ wirklich positiv, dann ist $\sqrt{\frac{b}{a}}$ (nach §. 68.) ebenfalls allemal eine positive Zahl; also ist der Werth x (aus 3.) dann allemal positiv. —

Untersucht man aber, ob dies der einzige Werth sei, der die Eigenschaft hat, daß er statt x gesetzt, die Gleichung 2. oder 1. identisch macht, oder ob es vielleicht noch mehr Werthe giebt, die man durch w bezeichnen mag, welche dasselbe leisten, d. h. welche ebenfalls

$$4)\qquad w^2=\frac{b}{a}$$

machen, so darf man nur die 4. von der 2. subtrahiren und man erhält

$$5)\quad x^2-w^2=0 \text{ oder } (x-w)(x+w)=0,$$

so daß entweder $x-w=0$ oder $x+w=0$ sein kann. Man findet daher, daß von den beiden Zahlen

$$+\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{und} \quad -\sqrt{\frac{b}{a}}$$

jede die Eigenschaft hat, daß, wenn man sie statt x setzt, die Gleichung 2. oder 1. identisch wird.

II. Ist aber $\frac{b}{a}$ nicht positiv oder Null, so giebt es keinen Werth von x, welcher positiv, negativ oder Null wäre, und welcher der gegebenen reinen quadratischen Gleichung (1. oder 2.) genügte.

§. 86. Die vorstehende Untersuchung setzt uns aber in den Stand, wenn auch noch nicht die m^{te}, aber doch die 2^{te} Wurzel allgemeiner aufzufassen. Wir erblicken nämlich von nun an unter der Quadrat-Wurzel $\sqrt{p}$ eine bloß angezeigte Radikation, für welche aber das Gesetz §. 31. A. I. gilt, nämlich

$$(\odot)\ldots \qquad (\sqrt{p})^2 = p.$$

Weil es aber, wie wir so eben gesehen haben, so oft p positiv ist, zwei Formen giebt, nämlich eine positive und auch eine negative Zahl, welche dieselbe Eigenschaft haben, die wir jetzt durch das Zeichen $\sqrt{p}$ vorstellen, so müssen wir von nun an $\sqrt{p}$ als zweiförmig (zweideutig) ansehen, während p ganz allgemein gedacht ist; und wir können diese beiden Formen, welche $\sqrt{p}$ repräsentirt, durch

$$+\sqrt{p} \quad \text{und} \quad -\sqrt{p}$$

vorstellen, sobald wir $\sqrt{p}$ selbst, wie früher, als nur eindeutig ansehen wollen.

Für diese allgemeinen Quadrat-Wurzeln gelten aber noch die Gesetze der Wurzeln im §. 31. B. Nr. Nr. 1. 2., nämlich

$$1)\ \sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad \text{und} \quad 2)\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

aber statt des Gesetzes §. 31. A. II., jetzt

$$(\odot)\ldots \qquad \sqrt{(a^2)} = \pm a;$$

weil jetzt die bedeutende Beschränkung eintritt, „daß man in den Rechnungen statt der Quadrat-Wurzel nicht den ersten besten ihrer zwei reellen Werthe setzen darf, d. h. nicht gerade einzig den positiven, auch nicht gerade einzig den negativen Werth, sondern so lange alle beide (in der Form $\pm a$) setzen muß, bis aus der Betrachtung des speziellen Falles bestimmt entschieden werden kann, welcher der beiden Werthe dasmal durch das allgemeine Zeichen der Wurzel vorgestellt gewesen ist." *)

Schriebe man z. B. in der Formel

$$(☾)\ldots \qquad \sqrt{a^2} = a,$$

3 statt a, folglich 9 statt a^2, dann aber statt $\sqrt{(a^2)}$, d. h. statt $\sqrt{9}$ den Werth -3, so erhielte man die Gleichung

$$-3 = 3, \quad \text{also} \quad 0 = 6,$$

welche offenbar falsch ist.

Und wäre $a = -3$, also $a^2 = (-3)^2 = 9$; substituirte man diese Werthe statt a und statt a^2 in die Gleichung (☾); setzte man aber

*) Diese Regel muß mit der größten Sorgfalt beachtet werden.

dasmal statt $\sqrt{(a^2)}$, d. h. statt $\sqrt{9}$ den Werth $+3$, so erhielte man die Gleichung

$$+3=-3 \text{ oder } 6=0,$$

welche wiederum unrichtig ist.

Eine zweite höchst wichtige und immer mit der größten Sorgfalt zu beachtende Regel, welche aus der Zweideutigkeit (überhaupt aus der Mehrdeutigkeit) der Ausdrücke nothwendig hervorgeht, ist diese:

„Man behandle jedes mehrdeutige Zeichen, also z. B. das Zeichen $\sqrt{a}$, — wenn solches mehreremale erscheint, ohne daß man mit Gewißheit behaupten kann, daß es jedesmal einen und denselben seiner Werthe vorstellt, — so, als könne es jedesmal entweder denselben oder einen andern seiner Werthe vorstellen."

Man setze also

statt $5\cdot\sqrt{9}+2\cdot\sqrt{9}$ nur dann $7\cdot\sqrt{9}$

und statt $5\cdot\sqrt{9}-2\cdot\sqrt{9}$ nur dann $3\cdot\sqrt{9}$.

wenn man gewiß weiß, daß in $5\cdot\sqrt{9}$ und in $2\cdot\sqrt{9}$ der Faktor $\sqrt{9}$ jedesmal einen und denselben seiner beiden Werthe, entweder jedesmal den Werth $+3$, oder jedesmal den Werth -3 vorstellt. Weiß man das letztere aber nicht ganz gewiß, so lasse man die Ausdrücke $5\cdot\sqrt{9}\pm2\cdot\sqrt{9}$ stehen, ohne sie in die kürzeren, welche dann falsch sein könnten, umzuformen.

Eben so schreibe man statt $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}$ nur dann $(\sqrt{4})^2$ oder 4, wenn man gewiß weiß, daß in dem Produkte $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}$ die beiden Faktoren $\sqrt{4}$ wirklich einander gleich sind, d. h. daß wirklich alle beide Formen $\sqrt{4}$ einen und denselben Werth (übrigens $+2$ oder -2) vorstellen.

§. 87. Die Einführung der allgemeinen Quadrat-Wurzel führt zu der neuen speziellen Zahlenform $\sqrt{-q}$, wo q absolut (nicht negativ) gedacht ist, und welche sich auf keine der frühern Formen, die wir (im §. 25.) reelle Zahlen nannten, zurückführen läßt. Man nennt diese neue Form die imaginäre Quadrat-Wurzel; sie ist zweideutig und läßt sich auch allemal so schreiben, nämlich $\sqrt{q}\cdot\sqrt{-1}$ oder $\pm\alpha\cdot\sqrt{-1}$, wenn $\pm\alpha$ die beiden reellen Werthe von $\sqrt{q}$ vorstellt; so daß man keine andere imaginäre Quadrat-Wurzel zu beachten braucht als $\sqrt{-1}$.

Die Gesetze und praktischen Regeln, die für alle allgemeinen Quadrat-Wurzeln gelten (§. 86.), gelten natürlich auch für die imaginären. Man hat daher

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(+1)}=\pm 1,$$

und nur dann

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1,$$

wenn man gewiß weiß, daß in dem Produkt zur Linken wirklich alle beide Faktoren einander gleich gedacht sind, so daß nicht der eine Faktor die Form $+i$, der andere dagegen die Form $-i$ bedeutet, wo i so gedacht ist, daß man $i^2=-1$ hat; weil dann $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(+i)\cdot(-i)=-i\cdot i$ $=-i^2=-(-1)=+1$ sein würde.

Ferner hat man

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=\sqrt{(+36)}=\pm 6;\text{*)}$$

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{(+ab)}=\pm\sqrt{ab};$$

$$\frac{\sqrt{(-4)}}{\sqrt{(-9)}}=\sqrt{\tfrac{4}{9}}=\pm\tfrac{2}{3};$$

u. s. w.

§. 88. Die reine quadratische Gleichung

$$1)\qquad a\cdot x^2=b$$

giebt also jetzt, wenn auch b und a ganz allgemein sind, doch immer

$$2)\quad x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},\ \text{oder auch}\ x=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

wo man im letztern Fall $\sqrt{\frac{b}{a}}$ als wirklich zwei Formen vorstellend sich denkt.

§. 89. Es ist oft sehr vortheilhaft, einen gesuchten Unbekannten x in zwei Theile zu zerlegen, also in der Form $y+z$ sich zu denken, damit man den einen dieser Theile, z. B. z, ganz beliebig, also auch bestimmten Zwecken gemäß, annehmen und dann den andern Theil y noch so dazu finden könne, daß die Summe $y+z$ das gesuchte x wirklich ist.

§. 90. Wenden wir diese Methode auf die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung

---

*) Wüßte man aber gewiß, daß in $\sqrt{-4}=2\cdot\sqrt{-1}$ und in $\sqrt{-9}=3\cdot\sqrt{-1}$ der Faktor $\sqrt{-1}$ jedesmal eine und dieselbe seiner beiden Formen repräsentirt, so könnte man sagen, $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=6\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ $=6\cdot(\sqrt{-1})^2=-6$, und das Resultat wäre nicht mehr zweideutig.

1) $$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$
an; setzen wir also

2) $$x = y + z,$$
so daß die 1., wenn sie nach dem Unbekannten y geordnet wird, die Form

3) $$a \cdot y^2 + (2az + b) \cdot y + (c + bz + az^2) = 0$$
annimmt, so kann man nun machen, daß diese letztere Gleichung eine reine quadratische wird, wenn man z so nimmt, daß der Koeffizient von y der Null gleich wird, daß also

4) $$2az + b = 0, \quad \text{d. h.} \quad z = -\frac{b}{2a}$$
wird. Die Gleichung 3. geht dadurch über in

5) $$a \cdot y^2 = -c + \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$
und giebt

6) $$y = \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
so daß (aus 2.)

7) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ wird.

Der Anfänger behält im Gedächtniß:

I. Aus $ax^2 + bx + c = 0$ folgt $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

II. aus $x^2 + px + q = 0$ folgt $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$;

und kann dann die Auflösung jeder reinen oder unreinen quadratischen Gleichung (wenn die Gleichung nur erst geordnet ist) ohne weiteres hinschreiben.

So findet sich

aus $3x^2 - x = 5$, $\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{6} = \begin{cases} 1{,}468\cdots \\ -1{,}135\cdots \end{cases}$;

aus $x^2 - x = 1$, $\quad x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1{,}618\cdots \\ -0{,}618\cdots \end{cases}$;

aus $3x^2 - x = -5$, $\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{-59}}{6} = \begin{cases} \frac{1}{6} + (1{,}280\cdots) \cdot \sqrt{-1} \\ \frac{1}{6} - (1{,}280\cdots) \cdot \sqrt{-1} \end{cases}$;

aus $x^2 - x = -1$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} + (0{,}8659\cdots)\cdot\sqrt{-1} \\ \frac{1}{2} - (0{,}8659\cdots)\cdot\sqrt{-1} \end{Bmatrix}$;

aus $3x^2 - 4x = -1$, $x = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{3} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix}$;

u. s. w. f.

§. 91. Hat man zwei Gleichungen zwischen zweien Unbekannten x und z, wovon die eine oder jede, die Unbekannten in der zweiten Dimension (nämlich x^2, z^2 oder xz) enthält, und sollen diese Gleichungen nach ihren Unbekannten z und x aufgelöst werden, so muß man wieder einen der Unbekannten eliminiren, nur daß dies hier gewöhnlich mittelst der Substitutions-Methode geschieht, so nämlich, daß man aus derjenigen Gleichung denjenigen Unbekannten zuerst entwickelt, der sich in der einfachsten Form (besonders, wo möglich, ohne Wurzel) finden läßt, solchen Werth aber dann statt dieses Unbekannten in die andere Gleichung substituirt. — Der weitere Gang der Auflösung bleibt derselbe, wie bei den einfachen Gleichungen, nur mit dem Unterschiede, daß, weil man hier für jeden Unbekannten mehr als einen Werth bekommt, hier noch jedesmal die zusammengehörigen Werthe der Unbekannten herausgesucht werden müssen, so nämlich, daß sie wirklich den gegebenen Gleichungen genügen.

Sind z. B. die beiden Gleichungen aufzulösen

1) $x^2 - z^2 = \alpha$ und 2) $2xz = \beta$,

so findet man (aus 2):

3) $z = \frac{\beta}{2x} = \frac{\frac{1}{2}\beta}{x}$,

substituirt diesen Werth statt z in die 1. und erhält

4) $x^2 - \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{x^2} = \alpha$ oder $x^4 - \alpha x^2 = \frac{1}{4}\beta^2$,

welche letztere Gleichung quadratisch ist, wenn man x^2 (und nicht x selbst) als den Unbekannten ansieht. Sie giebt

5) $x^2 = \frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$,

also 6) $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Substituirt man nun diesen Werth von x in die Gleichung 1., so findet man sogleich

7) $z^2 = -\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$,

also 8) $z = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Da nun $x^2 - z^2 = \alpha$ werden soll, so müssen die beiden innern Quadrat-Wurzeln in x und z einerlei Vorzeichen bekommen; und da $2xz = \beta$ werden muß, so wird es vom (positiv oder negativ) gegebenen β abhängen, ob die äußern Vorzeichen von x und z beide dieselben, oder beide verschieden genommen werden müssen.

Hätte man zu dem (in §. 6.) gefundenen x, das zugehörige z aus der Gleichung 3. gefunden, so hätte man zu jedem Werth von x nur einen, also nothwendig den zugehörigen Werth von z sogleich gefunden.

Es ist übrigens bei gewissen Aufgaben vortheilhaft, statt der unbekannten x und z, lieber erst ihre Summe $x + z = s$ und ihre Differenz $x - z = d$, also s und d als die Unbekannten einzuführen (indem man $x = \frac{s+d}{2}$ und $z = \frac{s-d}{2}$ findet und diese Werthe statt x und z substituirt) und aus den gegebenen Gleichungen zunächst diese Unbekannten s und d zu bestimmen.

Als Beispiel hierzu seien die Gleichungen

1) $x^2 + z^2 = a$ und 2) $xz = b$

aufzulösen. Man erhält aus ihnen

3) $s^2 + d^2 = 2a$ und 4) $s^2 - d^2 = 4b$.

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich aber jetzt s^2 und d^2, also auch s und d, mithin noch x und y sogleich.

§. 92. Soll die reine kubische Gleichung

$$1)\quad x^3 = a$$

aufgelöst werden, so erhält man

$$2)\quad x = \sqrt[3]{a};$$

welches Resultat jedoch voraussetzt, daß a positiv ist (oder Null), damit $\sqrt[3]{a}$ ebenfalls eine bestimmte Bedeutung habe.

I. Ist dies der Fall, d. h. ist a positiv, und ist also $\sqrt[3]{a} = \alpha$ auch positiv, und $a = \alpha^3$, so geht die Gleichung 1. in

$$x^3 - a = 0 \quad \text{oder} \quad x^3 - \alpha^3 = 0$$

d. h. in $(x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2) = 0$

über, und giebt daher, außer $x = \alpha$, auch noch

$$x^2 + \alpha x + \alpha^2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = \alpha \cdot (-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}).$$

Die reine kubische Gleichung 1., wenn a positiv ist, hat daher 3 Auflösungen, d. h. es giebt 3 Werthe, von denen jeder die Eigenschaft hat, daß, wenn er statt x gesetzt wird, dann $x^3 = a$ identisch wird.

II. Ist a negativ, ist z. B. $a = -b$, wo b wieder positiv; findet man dann $\sqrt[3]{b} = \beta$, wo β auch positiv ist, so ist $a = -\beta^3$; die Gleichung 1. wird nun

$$x^3 + \beta^3 = 0, \quad \text{oder} \quad (x + \beta)\cdot(x^2 - \beta x + \beta^2) = 0,$$

und giebt daher nicht bloß $x = -\beta$, sondern auch noch

$$x^2 - \beta x + \beta^2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = -\beta\cdot(-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}),$$

so daß x jetzt wieder 3 Werthe hat.

III. Ist aber a nicht positiv, nicht negativ, überhaupt nicht speziell näher bestimmt, sondern ganz allgemein, so kann man die reine kubische Gleichung 1. nur dann auflösen, wenn man $\sqrt[3]{a}$ eben so allgemein aufgefaßt hat, wie früher (im §. 86.) die Quadrat-Wurzel.

§. 93. Wir verstehen daher von nun an unter

$$\sqrt[3]{a}$$

jeden Ausdruck (d. h. jede Form), welcher die Eigenschaft hat, daß er a giebt, so oft er mit 3 potenzirt wird; so daß also allemal

$$1) \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

ist.

Weil es, wenn a positiv oder negativ ist, allemal 3 Ausdrücke giebt, welche dieselbe Eigenschaft mit einander gemein haben (nach §. 92.), so müssen wir im Allgemeinen $\sqrt[3]{a}$ als dreideutig ansehen und behandeln, namentlich also bei ihr dieselbe Vorsicht anwenden, welche (in dem §. 86.) für die mehrdeutigen Ausdrücke angedeutet werden mußte.

Mit Rücksicht auf diesen Umstand lassen sich übrigens wiederum die Formeln

$$2)\ \sqrt[3]{(ab)} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \quad \text{und} \quad 3)\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

als allgemeingültige nachweisen.

§. 94. Die reine kubische Gleichung

$$x^3 = a$$

hat nun im Allgemeinen 3 Auflösungen, wovon die eine

$$x = \sqrt[3]{a}$$

ist, die beiden andern aber durch

$$x = \sqrt[3]{a} \cdot (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

ausgedrückt sind, während $\sqrt[3]{a}$ in allen 3 Ausdrücken einen und denselben beliebigen ihrer 3 Werthe vorstellt.

§. 95. Soll nun die (nächst einfache, nämlich die) reducirte kubische Gleichung

1) $\qquad x^3 + px + q = 0$

aufgelöst werden, so wendet man wieder das Verfahren des §. 89. an, setzt daher

2) $\qquad x = y + z,$

und erhält (aus 1.)

3) $\quad y^3 + z^3 + 3yz(y+z) + p(y+z) + q = 0.$

Setzt man nun in dieser neuen Gleichung den Gesammt-Koeffizienten von $y+z$, nämlich $3yz+p$ der Null gleich, d. h. denkt man sich z so bestimmt, daß

4) $\qquad 3yz + p = 0$

wird, so geht die Gleichung 3. zur Bestimmung von y in

5) $\qquad y^3 + z^3 + q = 0$

über. Löst man nun beide Gleichungen 4. und 5. nach y und z auf, so hat man zuletzt x aus 2.

Die 4. giebt aber

6) $\qquad z = -\frac{\frac{1}{3}p}{y};$

wird nun dieser Werth in die 5. substituirt, so erhält man

7) $y^3 - \frac{\frac{1}{27}{}^3}{y^3} + q = 0$ oder $y^3 + q \cdot y^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0.$

Diese Gleichung ist eine quadratische, wenn man y^3 (und nicht y selbst) als den Unbekannten ansieht, und giebt (nach §. 90.)

8) $$y^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3},$$

also

9) $$y = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}};$$

die 6. aber giebt z, und die 2. dann x dazu.

Man findet (aus 9.) für y sechs verschiedene Werthe; zu jedem Werth von y giebt die 6. einen einzigen Werth von z dazu; und es giebt daher 6 Werthe von $x = y + z$, die jedoch paarweise einander gleich sind, so daß x nur 3 Werthe hat.

Gewöhnlich schreibt man, obgleich weniger bequem

10) $$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

und nennt diese Formel die Cardanische.

Sind p und q reell, so sind alle 3 Werthe von x reell, so oft $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ negativ wird; dagegen ist nur einer der 3 Werthe von x reell, und die beiden andern sind imaginär, so oft $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ positiv ist. In dem letztern Fall steht der wirklichen Ausrechnung nie ein Hinderniß entgegen, weil dann nur aus positiven oder negativen Zahlen die Kubik-Wurzel gezogen zu werden braucht und beides (nach §. 68.) und mittelst der Formel $\sqrt[3]{(-b)} = -\sqrt[3]{b}$ ohne weiteres vor sich gehen kann. — In dem erstern Fall dagegen, wo $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ negativ wird, etwa $= -R$, wo also $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{-R} = \sqrt{R} \cdot \sqrt{-1} = r \cdot \sqrt{-1}$ (wenn $\sqrt{R} = r$ ist) imaginär wird, da bekommt man die Kubik-Wurzel aus den imaginären Ausdrücken $-\frac{1}{2}q + r \cdot \sqrt{-1}$ und $-\frac{1}{2}q - r \cdot \sqrt{-1}$ zu ziehen, und man sieht sich — in so fern man solches Geschäft noch nicht erlernt haben sollte, d. h. in so fern man nicht erlernt haben sollte $\sqrt[3]{\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}}$, wo α und β beliebig reell gedacht sind, in die Form $P + Q \cdot \sqrt{-1}$ umzuformen, — mitten in der Rechnung aufgehalten.

Man muß also noch mehr Ziffern-Rechnen lernen, und wir verweisen in Bezug auf diese uns noch erforderliche größere Kenntniß des Ziffern-Rechnens auf den §. 196., und bemerken hier nur noch, daß man diesen Fall der Cardanischen Formel, wo die Ausrechnung noch verschoben werden muß, den irreduktiblen Fall derselben nennt.

Jedenfalls ist es aber bequemer, statt x aus 10. zu berechnen, sich aus 9. zuerst y zu verschaffen, dann $z = -\frac{\frac{1}{3}p}{y}$ (aus 6.) dazu zu finden, und zuletzt $x = y + z$ zu berechnen.

§. 96. Soll aber die vollständige kubische Gleichung

1) $v^3 + a \cdot v^2 + b \cdot v + c = 0$

aufgelöst werden, so setze man wieder

2) $v = x + w$,

und ordne die neue Gleichung nach x, so daß man erhält

3) $x^3 + (3w + a) \cdot x^2 + (3w^2 + 2aw + b) \cdot x + (w^3 + aw^2 + bw + c) = 0.$

Man bestimme dann w so, daß der Koeffizient von x^2 der Null gleich wird; man setze also

4) $3w + a = 0$ oder $w = -\frac{1}{3}a$,

und die Gleichung 3. geht dann in die reducirte kubische Gleichung

5) $x^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)x + (c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3) = 0,$

oder

6) $x^3 + p \cdot x + q = 0$

über, wenn

7) $b - \frac{1}{3}a^2 = p$ und 8) $c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3 = q$

gesetzt wird. Diese letztere Gleichung ist nun im §. 95. aufgelöst; und da man für x drei Werthe findet, so giebt die Gleichung 2. in Verbindung mit der 4. auch für v drei Werthe.

§. 97. Betrachten wir nun noch einige besondere Arten von Gleichungen, welche in den Elementen schon erscheinen und mittelst der bisher vorgetragenen Elementar-Lehren gelöst werden können, obgleich sie zu, erst später in Betracht zu ziehenden Klassen von Gleichungen gehören.

I. Wäre z. B. gegeben die Gleichung

$$\sqrt{a - bx} = c,$$

so würde man, um die Wurzel wegzuschaffen, auf jeder Seite quadriren, und erhalten

$$a - bx = c^2, \text{ also } x = \frac{a - c^2}{b}.$$

II. Wäre aber auf der einen Seite des Gleichheits-Zeichens außer

der Wurzel noch ein Glied, so würde das Quadriren nichts helfen, sondern man müßte erst das letztgedachte Glied auf die andere Seite schaffen. Wäre z. B. gegeben

$$x - \sqrt{a - bx} = c,$$

so müßte man erst schreiben

$$-\sqrt{a - bx} = c - x,$$

und nun quadriren. Dies gäbe dann

$$a - bx = c^2 - 2cx + x^2,$$

also

$$x = -\tfrac{1}{2}b + c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}b - c)^2 + a - c^2} = -\tfrac{1}{2}b + c \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - bc + a}.$$

III. Dasselbe bliebe alles eben so, wenn statt der Quadrat-Wurzel eine Kubik-Wurzel stünde, nur daß man dann kubiren müßte.

IV. Die Gleichung $\sqrt[m]{a - bx} = \sqrt[m]{c - dx}$ giebt, wenn man sie (d. h. ihre beiden Seiten) mit m potenzirt, sogleich

$$a - bx = c - dx, \text{ oder } x = \frac{a - c}{b - d}.$$

V. Die beiden Seiten der Gleichung

$$\sqrt[3]{a^2 + c} = \sqrt[4]{\frac{a^2 + c}{d \cdot (x + g)}},$$

wenn solche nach x aufgelöst werden sollte, müßte man auf die 4te Potenz erheben; und man erhielte

$$(a^2 + c) \cdot \sqrt[3]{a^2 + c} = \frac{a^2 + c}{d \cdot (x + g)},$$

woraus

$$x = \frac{1}{d \cdot \sqrt[3]{a^2 + c}} - g$$

hervorgeht.

VI. Die Gleichung

$$\sqrt[m]{a - x} = \sqrt[2m]{x^2 - 5ax + b^2}$$

müßte man (links und rechts) auf die (2m)te Potenz erheben. Dann erhielte man

$$(a - x)^2 = x^2 - 5ax + b^2,$$

woraus

$$x = \frac{b^2 - a^2}{3a}$$

hervorgeht.

VII. Um die Gleichung $a^x = b$ aufzulösen, würde man links und rechts die Logarithmen nehmen und haben

$$x \cdot \log a = \log b, \text{ also } x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Diese Gleichung, so wie die nachfolgende, gehören in Bezug auf den Unbekannten x zu denjenigen, welche transcendente Gleichungen genannt werden.

VIII. Wollte man aus der Gleichung

$$1) \qquad \frac{a^{mx} - a^{-mx}}{2} = b$$

den Unbekannten x finden, so würde man zuerst $\frac{1}{a^{mx}}$ statt a^{-mx} setzen, dann a^{mx} (und nicht mehr x selbst) als unbekannt ansehen, daher

$$2) \qquad a^{mx} = z$$

setzen, wodurch die Gleichung 1. in

$$3) \qquad z - \frac{1}{z} = 2b$$

übergeht. Diese letztere, nach z aufgelöst, giebt nun

$$4) \qquad z = b \pm \sqrt{b^2 + 1};$$

und ist z gefunden, so giebt die 2., wenn man links und rechts die Logarithmen nimmt,

$$5) \qquad m \cdot x \cdot log\, a = log\, z, \text{ also } x = \frac{log\, z}{m \cdot log\, a},$$

d. h.

$$6) \qquad x = \frac{log\,(b \pm \sqrt{(b^2 + 1)})}{m \cdot log\, a}$$

Diese Beispiele reichen aus, um dem Anfänger einstweilen zu zeigen, wie man sich in einzelnen Fällen hilft, um die Aufgabe in das Gebiet der Elemente zurückzuführen.

IX. Kommt irgend eine höhere algebraische Gleichung vor, z. B.

$$1) \qquad x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 6x - 1 = 0,$$

so müßte man suchen, den Ausdruck zur Linken in 5 Faktoren zu zerlegen, wo jeder die Form $x \pm q$ hat. Die gegebene Gleichung würde dann die Form annehmen

$$2) \quad (x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)\cdot(x-\delta)\cdot(x-\varepsilon) = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ irgend positive oder negative oder imaginäre Zahlen oder Null sind. Dann aber fällt in die Augen, daß der Gleichung 2., also auch der Gleichung 1. genügt wird, wenn irgend einer der 5 Faktoren Null wird, daß die Gleichung 1. also für den Unbekannten x gerade 5 Werthe liefert.

Ganz auf dieselbe Weise sieht man ein, daß überhaupt eine algebraische Gleichung vom m^{ten} Grade für den Unbekannten x gerade m Werthe liefert, die alle reell, oder zum Theil reell, zum Theil imaginär, oder die auch alle imaginär sein können.

§. 98. Wenn man mit imaginären Quadrat-Wurzeln und mit reellen Zahlen nach den bis jetzt gegebenen Regeln der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, der Potenzen und Wurzeln beliebig rechnet, so lassen sich alle Endresultate doch immer auf die spezielle Zahlform $p + q \cdot \sqrt{-1}$ bringen,

wo p und q irgend reelle Zahlen sind. Und da die Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$, für $p = 0$ zugleich auch jede reelle Zahl p vorstellt, so lassen sich alle denkbaren speziellen Zahlformen in diese Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$ zusammenfassen. Derjenige hat daher das Ziffern-Rechnen in seinem ganzen Umfange erlernt, welcher jeden gegebenen, aus Ziffern zusammengesetzten Ausdruck in diese Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$ umzuformen versteht.

Es ist dazu aber folgender Satz nöthig, nämlich: Ist

$$p + q \cdot \sqrt{-1} = \alpha + \beta \cdot \sqrt{-1},$$

und sind p, q, α, β, alle vier reell, so ist nothwendig einzeln

$$p = \alpha \quad \text{und} \quad q = \beta.$$

Denn wäre dies nicht, so hätte man aus der gegebenen Gleichung

$$\sqrt{-1} = \frac{p - \alpha}{\beta - q},$$

also

$$-1 = \left(\frac{p - \alpha}{\beta - q}\right)^2,$$

d. h. das negative wäre dem positiven gleich, was nie sein kann.

§. 99. 1) Das Addiren, Subtrahiren und Multipliciren zweier solcher Ausdrücke $\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}$ und $\gamma + \delta \cdot \sqrt{-1}$, in denen wir $\sqrt{-1}$ jedesmal als einen und denselben seiner beiden Formwerthe ansehen, hat durchaus keine Schwierigkeit. Man findet daher sogleich

$$(\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}) + (\gamma + \delta \cdot \sqrt{-1}) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) \cdot \sqrt{-1}$$

$$(\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}) - (\gamma + \delta \cdot \sqrt{-1}) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) \cdot \sqrt{-1}$$

$$(\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\gamma + \delta \cdot \sqrt{-1}) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \cdot \sqrt{-1}.$$

2) Will man dagegen $\dfrac{\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}}{\gamma + \delta \cdot \sqrt{-1}}$ in dieselbe Form bringen, so geschieht dies am bequemsten, wenn man Zähler und Nenner mit $\gamma - \delta \cdot \sqrt{-1}$ multiplicirt.*) Dies giebt

---

*) Will man z. B. bei $\frac{A}{\sqrt{B}}$, aus dem Nenner die Wurzel wegschaffen, so multiplicirt man Zähler und Nenner mit dem Nenner $\sqrt{B}$. — Man erhält dann $\frac{A \cdot \sqrt{B}}{B}$ oder $\frac{A}{B} \cdot \sqrt{B}$. — Will man aber z. B. bei

$$\frac{\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\cdot\sqrt{-1}}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\cdot\sqrt{-1}.$$

3) Auch findet man, wenn

$$\sqrt{\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}}=x+z\cdot\sqrt{-1}$$

gesetzt, und daraus dann, mittelst des Quadrirens

$$\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}=x^2-z^2+2xz\cdot\sqrt{-1},$$

also

$$\alpha=x^2-z^2 \text{ und } \beta=2xz$$

abgeleitet wird, sogleich

$$x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}$$

und

$$z=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})},$$

wo die innere Quadrat-Wurzel positiv genommen werden muß, damit x und z reell werden, und wo die äußern Quadrat-Wurzeln für x und z beide mit einerlei Vorzeichen genommen werden müssen, wenn die gegebene Zahl β positiv, wo aber x und z verschiedene Vorzeichen haben müssen, wenn β negativ gegeben sein sollte, weil der Gleichung $\beta=2xz$ so gut wie der andern $x^2-z^2=\alpha$ Genüge geleistet werden muß.

§. 100. Wir müssen zum Schlusse dieses Kapitels noch eines Verfahrens erwähnen, welches man „die Methode der unbestimmten Koeffizienten" nennt, und welches wir hier in einigen Beispielen auseinander setzen wollen.

I. Gesetzt man will, wie im vorhergehenden §. 99. Nr. 2. schon geschehen ist, $\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}$ durch $\gamma+\delta\cdot\sqrt{-1}$ divi-

---

$\frac{Z}{A+m\sqrt{B}}$ die Wurzel aus dem Nenner wegschaffen, so multiplicire man Zähler und Nenner mit $A-m\sqrt{B}$. Man erhält dann $\frac{Z}{A+m\sqrt{B}}$ $=\frac{Z\cdot(A-m\sqrt{B})}{A^2-m^2B}$.

Wollte man endlich dasselbe in $\frac{Z}{A-\sqrt{mB}}$ bewirken, so müßte man Zähler und Nenner mit $A+m\sqrt{B}$ multipliciren. Dann erhielte man $\frac{Z}{A-m\sqrt{B}}=\frac{Z\cdot(A+m\sqrt{B})}{A^2-m^2B}$.

diren, d. h. den Quotienten $\frac{\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\cdot\sqrt{-1}}$ in dieselbe Form $x+z\cdot\sqrt{-1}$ verwandeln, so wäre die Form des gesuchten Ausdrucks schon gegeben, und nur noch die „unbestimmten Koeffizienten" x und z zu suchen. Man setzte daher

$$\frac{\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\cdot\sqrt{-1}}=x+z\cdot\sqrt{-1},$$

multiplicirte mit $\gamma+\delta\cdot\sqrt{-1}$ auf jeder Seite, so daß man erhielte

$$\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}=(\gamma x-\delta z)+(\delta x+\gamma z)\cdot\sqrt{-1},$$

und machte diese Gleichung dadurch zur identischen, daß man x und z so zu bestimmen suchte, daß

$$\alpha=\gamma\cdot x-\delta\cdot z \quad \text{und} \quad \beta=\delta\cdot x+\gamma\cdot z$$

würde. Aus diesen Gleichungen findet sich aber dann

$$x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} \quad \text{und} \quad z=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2},$$

welches mit dem Resultat des §. 99. Nr. 2. zusammenfällt.

II. Die Auflösung der Aufgabe des §. 99. Nr. 3., so wie sie daselbst steht, ist ein anderes Beispiel der Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

III. Am häufigsten wird diese Methode angewandt, wenn Ausdrücke in unendliche Reihen umgeformt werden sollen, oder wenn unendliche Reihen von bestimmten Eigenschaften gesucht werden, weil die Form der Reihen dann auch schon gegeben ist, und nur noch die Koeffizienten dazu gefunden werden. — Auch hier besteht die Methode darin, daß man die gesuchten Koeffizienten einstweilen bezeichnet, z. B. durch P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, etc. etc., dann alle indirekten Operationen aus der Gleichung wegschafft, alle Klammern auflöst, alles links gerade so ordnet wie rechts, und zuletzt die einzelnen Theile links und rechts identisch macht. Dadurch erhält man in der Regel eine unendliche Menge von Gleichungen, aus denen die Koeffizienten

P_0, P_1, P_2, P_3, etc. etc. nach und nach, einer nach dem andern, sich bestimmen lassen.

Es sei z. B. $\frac{1}{1+2x+x^2}$ in eine unendliche Reihe von der Form $P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+P_4\cdot x^4+\cdots$ in infinit. zu verwandeln, so daß also die Form der Reihe gegeben ist, und nur die (noch) unbestimmten Koeffizienten P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, etc. etc. gesucht werden.

Man hat demnach zunächst

$$\frac{1}{1+2x+x^2}=P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+P_4\cdot x^4+\cdots.$$

Multiplicirt man auf jeder Seite mit $1+2x+x^2$, so erhält man, wenn zur Rechten sogleich alle Glieder zusammengefaßt werden, welche mit einerlei Potenzen von x versehen sind,

$$1=\left.\begin{matrix}P_0+P_1\\+2P_0\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}P_2\\+2P_1\\+P_0\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}P_3\\+2P_2\\+P_1\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}P_4\\+2P_3\\+P_2\end{matrix}\right|x^4+\cdots.$$

Soll nun diese Gleichung eine richtige werden, d. h. soll rechts genau nichts weiter stehen, als das, was links schon steht, so müssen die unbekannten Koeffizienten P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, etc. etc. so genommen werden, daß man $P_0=1$ und alle folgenden Koeffizienten von x, x^2, x^3 etc. etc. der Null gleich hat. Dies giebt die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}P_0&=1\\P_1+2P_0&=0\\P_2+2P_1+P_0&=0\\P_3+2P_2+P_1&=0\\P_4+2P_3+P_2&=0\\\text{u. s. w.}&\end{aligned}\right\}\text{ woraus }\left\{\begin{aligned}P_0&=1\\P_1&=-2\\P_2&=+3\\P_3&=-4\\P_4&=+5\\\text{u. s. w.}&\end{aligned}\right.$$

hervorgeht; so daß man nun gefunden hat

$$\frac{1}{1+2x+x^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6-\cdots \text{ in inf.}$$

Als ein weiteres Beispiel der Anwendung der „Methode der unbestimmten Koeffizienten" sei eine Reihe von der Form

$$1)\quad P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+P_4\cdot x^4+\cdots$$

gesucht, welche die Eigenschaft hat, daß wenn man in ihr die Koeffizienten P_0, P_1, P_2, P_3, etc. unverändert läßt, dagegen y statt x substituirt, so daß diese andere Reihe

$$2)\quad P_0+P_1\cdot y+P_2\cdot y^2+P_3\cdot y^3+P_4\cdot y^4+\cdots$$

daraus wird; dann aber diese beiden Reihen (1. und 2.) mit einander multiplicirt, — wiederum dieselbe Reihe mit denselben Koeffizienten zum Produkt gefunden wird, nur daß in diesem Produkt überall $x+y$ steht, wo in 1. bloß x, und in 2. bloß y zu finden ist. —

Man hat also vorausgesetzt die Gleichung

3) $(P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+\cdots)\cdot(P_0+P_1\cdot y+P_2\cdot+y^2+P_3\cdot y^3+\cdots)$
$$=P_0+P_1\cdot(x+y)+P_2\cdot(x+y)^2+P_3\cdot(x+y)^3+\cdots,$$
und aus dieser Gleichung sollen die unbestimmten Koeffizienten P_0, P_1, P_2, P_3, etc. etc. dasmal ihre Bestimmung erhalten.

Multiplicirt man aber die beiden Reihen mit einander und ordnet man das Produkt nach den Potenzen von y, so bekommt man als Koeffizienten von y^1 das Resultat

4) $P_0\cdot P_1+P_1^2\cdot x+P_2\cdot P_1\cdot x^2+P_3\cdot P_1\cdot x^3+P_4\cdot P_1\cdot x^4+\cdots$.

Auf der andern Seite des = Zeichens in 3., wenn man
$$x^2+2xy+y^2 \text{ statt } (x+y)^2$$
$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \text{ statt } (x+y)^3$$
u. s. w. f. substituirt, und das Resultat auch nach den verschiedenen Potenzen von y ordnet, ist dagegen der Koeffizient von y^1 der nachstehende:

5) $$P_1+2P_2\cdot x+3P_3\cdot x^2+4P_4\cdot x^3+5P_5\cdot x^4+\cdots.$$

Da nun in der 3. alles auf der einen Seite des = Zeichens genau dasselbe werden soll, was auf der andern, so müssen unter andern auch diese Koeffizienten von y links und rechts in 4. und 5. einander gleich sein, so daß man zunächst hat die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} P_0\cdot P_1=P_1\\ P_1\cdot P_1=2P_2\\ P_2\cdot P_1=3P_3\\ P_3\cdot P_1=4P_4\\ P_4\cdot P_1=5P_5\\ \text{u. s. w. f.}\end{array}\right\}\text{ woraus }\left\{\begin{array}{l} P_0=1\\ P_2=\frac{1}{2}P_1^2\\ P_3=\frac{1}{2\cdot 3}P_1^3\\ P_4=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}P_1^4\\ P_5=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}P_1^5\\ \text{u. s. w. f.}\end{array}\right.$$

hervorgeht. Der Koeffizient P_1 bleibt ganz unbestimmt, und die gesuchte Reihe, welche die angegebene Eigenschaft hat, ist daher die nachstehende:

$$\odot)\cdots \quad 1+P_1\cdot x+P_1^2\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}+P_1^3\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+P_1^4\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots.$$

Ob aber diese Reihe, während P_1 ganz unbestimmt bleibt, wirklich allen an sie gemachten Forderungen genüge, muß zuletzt noch dadurch untersucht werden, daß man zusieht, ob auch alle übrigen Glieder in der Gleichung 3. links genau eben so gefunden werden, als rechts, sobald man statt P_0, P_2, P_3, P_4, etc. etc. ihre hier gefundenen Werthe setzt. Solches bestätigt sich aber wirklich.

Die allgemeine Größenlehre

oder

die Lehre der benannten Zahlen.

Vorerinnerung.

Die Lehre der benannten Zahlen hat zu zeigen:

1) wie alle ihre Begriffe auf Begriffe und Lehren der unbenannten Zahlen zurückgebracht werden; und

2) wie alle Abhängigkeiten benannter Zahlen von einander, auf eine Abhängigkeit unbenannter Zahlen zurückgeführt wird, während die letztere allemal nichts anders als eine (im §. 6. definirte) Gleichung ist.

§. 101. Zuerst haben wir bloß benannte ganze Zahlen, z. B. 8 Pfund, 37 Rthlr., 12 Menschen, u. s. w.

Das wichtigste und erste Geschäft ist nun:

1) „jede solche benannte Zahl auf eine niedrigere Einheit zu bringen", z. B. 8 Pfd. in Lothe, 20 Rthlr. in Sgr. u. s. w. auszudrücken. — Dies geschieht, „indem man mit der Zahl der „niedrigern Einheiten, die in der höhern stecken, multiplicirt." Dies giebt z. B.

8 Pfd. = 8 · 32 Loth. = 256 Loth; *)

20 Rthlr. = 20 · 30 Sgr. = 600 Sgr.; u. s. w. f.

---

*) Wir bedienen uns hier bei benannten Zahlen des = Zeichens, um Einerleiheit der Sache auszudrücken, also nicht in dem Sinne, in welchem dasselbe Zeichen in der „Lehre der unbenannten Zahlen" d. h. in der „Analysis" gebraucht wird.

Das nächste Geschäft ist nun

2) „jede solche benannte Zahl auf eine höhere Einheit zu bringen." — Solches geschieht natürlich durch das umgekehrte Verfahren, nämlich durch Division. Man hat sonach

48 Zoll $= \frac{48}{12}$ Fuß $= 4$ Fuß;

660 Pfd. $= \frac{660}{110}$ Ctr. $= 6$ Ctr.; u. s. w. f.

§. 102. Diese letztere Aufgabe ist nur so lange möglich, als die verlangte Division ohne Rest aufgeht. Wollte man z. B. 20 Sgr. auf den Rthlr. als Einheit reduciren, so erhielte man $\frac{20}{30}$ Rthlr. oder $\frac{2}{3}$ Rthlr., welches andeuten würde, daß eben keine Anzahl Rthlr. existirt, welche so viel wäre als 20 Sgr.

Will man jedoch das Verfahren der Reduktion Nr. 2. des §. 101. auch in diesem Falle beibehalten, so führt man dadurch freiwillig die gebrochene benannte Zahl, z. B. $\frac{2}{3}$ Rthlr. ein, und versteht darunter 20 Sgr. oder „den dritten Theil der Einheit, zweimal genommen."

Wir verstehen von nun an unter der gebrochenen benannten Zahl $\frac{a}{b}$ E, den b^{ten} Theil der Einheit E, a mal genommen.

§. 103. So wie neben der ganzen benannten Zahl, auch diese gebrochene benannte Zahl eingeführt ist, so kann wieder nachgewiesen werden, daß die Reduktionen des §. 101. der höheren Einheiten auf niedrigere und der niedrigeren auf höhere, genau eben so wieder statt finden, wie dort (im §. 101.), man mag ganze oder gebrochene benannte Zahlen haben.

So findet sich $\frac{3}{4}$ Pfd. $= \frac{3}{4} \cdot 32$ Loth $= 24$ Loth;
aber auch $\frac{3}{4}$ Loth $= \frac{3}{4} : 32$ Pfd. $= \frac{3}{128}$ Pfd.;
ferner $7\frac{1}{2}$ Loth $= \frac{7\frac{1}{2}}{32}$ Pfd. $= \frac{15}{64}$ Pfd. u. s. w. f.

§. 104. 1) Werden zwei benannte Zahlen, oder die ihnen entsprechenden Größen, zusammengefügt (in eine Größe), so darf man nur die benannten Zahlen auf einerlei Einheit bringen, und dann „die unbenannten Zahlen addiren", die Summe aber auf dieselbe gemeinschaftliche Einheit beziehen, um die benannte Zahl zu haben, welche die neue Größe vorstellt.

So machen 8 Pfd. 12 Loth so viel als $(8 \cdot 32 + 12)$ Loth oder 268 Loth; desgleichen so viel als $8\frac{12}{32}$ Pfd. oder $8\frac{3}{8}$ Pfd. — Aber auch 2 Fuß 3 Zoll und 5 Fuß 8 Zoll machen zusammen 7 Fuß 11 Zoll; eben so machen 25 Rthlr. 24 Sgr. und 13 Thlr. 28 Sgr., zusammen 39 Rthlr. 22 Sgr.

2) Wird eine benannte Zahl oder die ihr entsprechende Größe von einer andern benannten Zahl oder von der ihr entsprechenden Größe hinweggenommen, so drückt man die übrig bleibende Größe dadurch wieder als benannte Zahl aus, daß man die beiden benannten Zahlen auf gleiche Einheiten (Benennung) bringt und dann „die unbenannten Zahlen von einander subtrahirt", die Differenz aber wieder auf dieselbe gemeinschaftliche Einheit bezieht.

Nimmt man also von 24 Rthlr. 20 Sgr. die Summe von 16 Rthlr. 13 Sgr. hinweg, so bleiben 8 Rthlr. 7 Sgr. — Nimmt man von 24 Rthlr. 13 Sgr. hinweg 16 Rthlr. 20 Sgr., so bleiben 7 Rthlr. 23 Sgr. (Dasmal thut man gut, statt 24 Rthlr. 13 Sgr. zu schreiben oder sich zu denken 23 Rthlr. 43 Sgr.)

3) Soll eine benannte Zahl, oder die ihr entsprechende Größe mehreremal genommen werden, z. B. 7mal, so darf man nur „die unbenannte Zahl mit 7 multipliciren", das Resultat aber wieder auf dieselbe Einheit beziehen, und man hat die neue Größe als benannte Zahl ausgedrückt.

So z. B. wenn man 7 Fuß 3 Zoll, 10 mal nimmt, erhält man 72 Fuß 6 Zoll. (Man hat zuerst die 3 Zoll 10 mal genommen; dies macht 30 Zoll oder 2 Fuß 6 Zoll.)

4) Soll aber eine benannte Zahl oder die ihr entsprechende Größe in eine Anzahl, z. B. in 5 gleiche Theile getheilt werden, so erhält man die, einem dieser Theile entsprechende benannte Zahl, wenn man „die unbenannte Zahl durch 5 dividirt", das Resultat aber auf dieselbe Einheit bezieht.

So ist der 5te Theil von 22 Rthlr. ausgedrückt durch $\frac{22}{5}$ Rthlr. oder $4\frac{2}{5}$ Rthlr. oder 4 Rthlr. 12 Sgr.

§. 105. Unter (geometrischem) Verhältniß einer Größe A zu einer andern Größe B, versteht man den Quotienten $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ der unbenannten Zahlen a und b, welche sich

auf eine gemeinschaftliche Benennung (Einheit) beziehen, und welche die Größen A und B bezüglich vorstellen. — Dies Verhältniß heißt incommensurabel, oder commensurabel, je nachdem der Bruch $\frac{a}{b}$ eine irrationale oder eine rationale Zahl ist (§. 45.).

Läßt sich $\frac{a}{b}$ aufheben und der in kleineren Zahlen ausgedrückte Quotient $\frac{m}{n}$ dafür schreiben, so sagt man auch, „es verhalten sich die Größen A und B zu einander, wie die Zahlen a und b, oder auch, wie die Zahlen m und n."

„Vier Größen stehen in (geometrischer) Proportion" wenn sie paarweise gleiche Verhältnisse haben.

§. 106. Sind also 4 Größen A, B, C, D, in Proportion und sind a, b, c, d, paarweise auf eine gemeinschaftliche Einheit bezogen, die (ganzen oder gebrochenen) Zahlen, welche diese Größen vorstellen, so findet allemal zwischen den unbenannten Zahlen a, b, c, d, die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad a:b = c:d$$

statt. — Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

Sind aber von 4 Größen, welche in Proportion stehen, drei gegeben und die vierte gesucht, so nennt man die Aufgabe eine Aufgabe der Regula de tri.

§. 107. Sind zwei Größen M und N mit A und B proportionirt, so oft man C und D sich als dieselben denkt, dagegen mit C und D proportionirt, so oft man sich A und B als dieselben denkt, und sind dann M, N, A, B, C, D in (ganzen oder gebrochenen) Zahlen ausgedrückt, die sich paarweise auf einerlei Einheit beziehen, so ist allemal zwischen diesen unbenannten Zahlen die Gleichung

$$\text{I.} \quad \frac{M}{N} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad \text{oder} \quad M:N = A \cdot C : B \cdot D.$$

Sind daher von den 6 Größen M, N, A, B, C, D fünf gegeben, so kann man die 6te berechnen. Solche Aufgaben heißen

Aufgaben der Regula de quinque, der direkten, wenn M oder N gesucht wird, der indirekten, wenn A, B, C oder D die gesuchte Größe ist.

Sind M und N zwei Rechtecke; A, B ihre Grundlinien, C, D ihre Höhen, so findet die Voraussetzung, also auch die Folgerung statt. — Desgleichen: sind M und N die Zinsen zweier Kapitalien A und B, in bezüglich C und D Jahren, so ist wieder die Voraussetzung erfüllt; also findet die Gleichung I. jedesmal statt.

Sind M und N einander gleich, so reducirt sich die Gleichung I. auf

$$\text{II.}\quad 1=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}\ \text{oder auf}\ A\cdot C=B\cdot D\ \text{oder}\ A:B=D:C;$$

und sind nun 3 dieser 4 Größen gegeben und die 4[te] gesucht, so nennt man die Aufgabe eine Aufgabe der indirekten Regula de tri.

Z. B. Eine und dieselbe Menge Holz (M oder N) wird von 5 Holzhauern in 4 Tagen klein gemacht; wieviel Tage brauchen 8 Holzhauer dazu? — Antw. $2\frac{1}{2}$ Tage.

§. 108. Ein andermal können zwei Größen M und N bezüglich von A, C, E und B, D, F so abhängen, daß sich allemal M zu N verhält, wie A zu B, oder wie C zu D, oder wie E zu F, so oft alles Uebrige als gleich gedacht wird. Sind dann diese Größen paarweise in gleich benannten Zahlen ausgedrückt, so ist allemal

$$\text{I.}\quad \frac{M}{N}=\frac{A\cdot C\cdot E}{B\cdot D\cdot F}\ \text{oder}\ M:N=A\cdot C\cdot E:B\cdot D\cdot F.$$

Dies ist der Fall, wenn M und N Zinsen sind, zweier Kapitalien A und B, welche bezüglich C und D Jahre lang zu E und F Procenten ausgeliehen sind.

Wird hier eine der 8 Größen gesucht, wenn die 7 übrigen gegeben sind, so hat man die direkte oder indirekte Regula de septem, je nachdem M oder N das gesuchte Stück ist, oder A, B, C, D, E oder F gesucht wird.

Ist M=N, so reducirt sich die Gleichung I. auf

$$\text{II.}\quad 1=\frac{A\cdot C\cdot E}{B\cdot D\cdot F}\ \text{oder}\ A\cdot C\cdot E=B\cdot D\cdot F;$$

und wenn dann von diesen letztern 6 Größen 5 gegeben sind, und die sechste gesucht wird, so hat man wieder einen Fall, der zur indirekten Regula de quinque gezählt wird.

§. 109. Da diese Sätze immer mit noch mehr Größen-Paaren hingestellt werden können, so faßt man alle solche Aufgaben unter dem Namen der Ketten-Regel zusammen.

§. 110. Alle bis hieher betrachteten Aufgaben der Lehre der benannten Zahlen heißen arithmetische Aufgaben oder Aufgaben der gemeinen Rechenkunst. — Jede andere nicht zu den so eben besprochenen gehörige Aufgabe wird dagegen eine algebraische Aufgabe genannt.

Bei einer algebraischen Aufgabe, wenn sie gelöst werden soll, muß man aber zuerst bewerkstelligen den Ansatz derselben. Dies geschieht so:

1) Man setzt die Einheiten fest, in welche man alle Größen als benannte Zahlen ausdrücken will, sowohl die gegebenen als die gesuchten. Für die gegebenen Größen bekommt man dann bekannte unbenannte Zahlen; die unbenannten Zahlen dagegen, durch welche die unbekannten Größen ausgedrückt werden, bezeichnet man durch beliebige Buchstaben x, y, z, etc. etc.

2) Hernach denkt man sich irgend eine der vorkommenden Größen als benannte Zahl, und drückt sie d. h. ihre unbenannte Zahl [vermöge des Zusammenhanges, in welchem die Größen, also auch die (bekannten und unbekannten) Zahlen, durch welche sie vorgestellt sind, zu einander stehen] zweimal aus. Diese zwei Ausdrücke, weil sie eine und dieselbe unbenannte (ganze oder gebrochene) Zahl ausdrücken, sind dann nothwendig einander gleich.

3) Man verschafft sich (wenn man kann) so viele solche Gleichungen, als man unbekannte Zahlen x, y, z, etc. in die Rechnung eingeführt hat.

§. 111. Hat man aber so viele Gleichungen als Unbekannte, so löst man nun diese Gleichungen nach Anleitung der Kap. VIII. und IX. auf, d. h. man findet alle Ausdrücke, welche statt der Unbekannten x, y, z, etc. etc. in die vorhandenen

Gleichungen substituirt, solche wirklich identisch machen. — **Unter diesen zusammengehörigen Werthen der Unbekannten, welche den Gleichungen genügen, sind dann diejenigen zu nehmen, welche wirklich auch noch allen übrigen Bedingungen der Aufgabe selbst genügen.**

Unter den Bedingungen aber, welche zwar nicht in Gleichung gestellt sind, welche aber doch noch von den Werthen der Unbekannten x, y, z, etc. erfüllt werden müssen, steht in der Regel oben an, daß x, y, z, etc. etc. benannte Zahlen geben sollen, daß also x, y, z ganze oder gebrochene, aber nicht imaginäre und auch nicht negative Werthe haben.

In selteneren Einzelfällen kann man jedoch die Aufgabe von vorn herein gleich so eingerichtet haben, daß die gesuchten Unbekannten x, y, z, etc. etc. auch negative, ja wohl auch imaginäre Werthe vorstellen.

Man kann oft eine und dieselbe algebraische Aufgabe so behandeln, daß man nur einen einzigen Unbekannten einführt, alle übrigen Unbekannten sogleich in diesen einzigen ausdrückt, und so zu einer einzigen Gleichung gelangt; — aber auch so behandeln, daß man sogleich zwei oder noch mehr Unbekannte einführt und deshalb auch zwei oder noch mehr Gleichungen sich verschaffen muß, die den Ansatz bilden.

Zuweilen ist die Aufgabe in der That nicht genug bestimmt, so daß man weniger Gleichungen erhält, als Unbekannte gesucht werden. Sie läßt dann in der Regel unendlich viele verschiedene Auflösungen zu, wenn nicht die Zahl dieser Auflösungen dadurch sehr beschränkt wird, daß noch Nebenbedingungen erfüllt werden müssen, welche sich nicht in Gleichungen bringen lassen. (Vgl. §. §. 85. und 53.)

Der Lehrer wird hierzu Beispiele geben.

§. 112. Wir fügen am Schlusse dieser allgemeinen Größenlehre noch folgende allgemeine Begriffe hinzu:

1) Eine Größe ist entweder schon eine benannte Zahl oder kann noch benannte Zahl werden. An diesem Kennzeichen wollen wir in der Folge das Dasein einer Größe erkennen.

2) Zwei Größen nennen wir *gleiche*, wenn sie beide durch eine und dieselbe benannte Zahl ausgedrückt werden können.

3) Die eine Größe A heißt *größer* als die andere B, welche letztere dann auch *kleiner* als A genannt wird, so oft,

wenn A und B in gleichbenannten Zahlen ausgedrückt werden, und a und b die unbenannten Zahlen vorstellen, — so oft dann (im Sinne des §. 26.)

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a$$

gefunden wird. — Wir bedienen uns daher auch derselben $> <$ Zeichen, um die größere und kleinere Größe erkennen zu lassen.

4) Wir sagen öfter: „die Größe A werde durch die Größe B (z. B. die gerade Linie A durch die gerade Linie B) dividirt," wenn wir die unbenannten Zahlen a und b durch einander dividiren, also das Verhältniß von A zu B (nach §. 105.) angeben sollen.

Es ist leicht zu beweisen, daß der Quotient der beiden Größen A und B in diesem, so eben festgestellten Sinne, immer derselbe bleibt, man mag A und B in höhern oder in niedrigern Einheiten ausdrücken, wenn nur beide jedesmal auf eine und dieselbe Einheit bezogen werden.

So ist der Quotient zweier Linien von 6 Fuß und 9 Fuß Länge, $= \frac{6}{9}$ oder $= \frac{2}{3}$. Drückt man aber diese Linien in Zollen aus, so hat die erstere $6 \cdot 12$ Zolle, die andere dagegen $9 \cdot 12$ Zolle, und diese Zahlen durch einander dividirt, geben $\frac{6 \cdot 12}{9 \cdot 12}$, d. h. wiederum $\frac{6}{9}$ oder $\frac{2}{3}$.

§. 112ª. Anhang.

Zins- und Zinses-Zins-Rechnung.

Wir geben ferner am Schlusse dieses Kapitels noch den Ansatz von zweien Klassen häufig wiederkehrender Aufgaben, die man gewöhnlich unter dem Namen der Zinsen-Rechnung zusammenfaßt, obgleich die Aufgaben selbst bei Berechnungen der Volksmengen, der Forst-Bestände, und überall erscheinen, wo in gewissen Zeiträumen, gewisse Procente zugerechnet werden sollen.

I. Einfache Zinsen.

Ein Kapital von K Rthlrn. steht zu m Procent jährlicher Zinsen t Jahre lang, und trägt in dieser Zeit an Zinsen Z Rthlr.; an Kapital und Zinsen sind zu Ende des t^{ten} Jahres C Rthlr. vorhanden. — Unter dieser Voraussetzung hat man die beiden Gleichungen

$$1)\ C=\left(1+\frac{m}{100}\cdot t\right)\cdot K \quad \text{und} \quad 2)\ Z=\frac{m}{100}\cdot t\cdot K.$$

II. Zinses-Zinsen.

Die Buchstaben K, m, t, Z, C haben dieselbe Bedeutung, nur wird jetzt noch vorausgesetzt, daß zu Ende eines jeden Jahres die Zinsen immer wieder zum Kapital geschlagen und somit in den folgenden Jahren sogleich wieder mit verzinset werden. — Unter der jetzigen Voraussetzung hat man die beiden Gleichungen

$$1)\ C=\left(1+\frac{m}{100}\right)^t\cdot K.$$

und

$$2)\ Z=\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)^t-1\right]\cdot K.$$

Diese letztern Formeln gelten auch dann noch, wenn etwa die halbjährigen (oder die vierteljährigen) Zinsen sogleich wieder zum Kapital geschlagen werden sollten; man müßte nur dann in ihnen statt m die Procente für ein halbes (oder für ein Viertel-) Jahr setzen, dagegen statt t die Anzahl sämmtlicher halben (oder Viertel-) Jahre.

Die ebene Geometrie.

Der ebenen Geometrie

Erstes Kapitel.

Von den geraden Linien und Winkeln. Parallele und schneidende Linien.

§. 113. Der Raum erscheint uns ohne Ende und stetig (d. h. nirgends natürlich begrenzt, aber überall beliebig begrenzbar). — In ihm erblicken wir den Punkt (die einfachste Grenze); die Linie (die gerade und die krumme), die durch Punkte beliebig begrenzt werden kann; ferner die Fläche (die ebene und die krumme), welche durch Linien beliebig begrenzt werden kann; zuletzt den Körper, der durch beliebige Flächen begrenzt ist.

Jeder begrenzte Linien-, Flächen- oder Körper-Raum heißt eine Figur; und Figuren heißen kongruent, wenn sie, mit allen ihren Grenzen zusammenfallend gedacht werden können.

Die Lehre von den Figuren heißt Geometrie (oder Raum-Größen-Lehre).

§. 114. Von den geraden Linien oder Richtungen ist zu merken:

1) Die gerade Linie ist durch 2 Punkte gegeben, ohne Ende

fort. Durch 2 gegebene Punkte kann man also nur eine einzige Gerade legen. (Kann nicht bewiesen werden.)

2) Durch 3 gegebene Punkte sind daher immer 3 gerade Linien gegeben, ohne Ende fort, welche jedoch alle 3 zuweilen in eine und dieselbe zusammenfallen können, wenn nämlich der dritte der gegebenen Punkte in der unendlichen Geraden liegt, welche durch 2 der gegebenen Punkte gegeben ist. — Diesen letztern Fall ausgenommen, so bilden 3 Punkte allemal eine Figur, welche Dreieck genannt wird.

3) Zwei gerade Linien können daher nur einen einzigen Punkt mit einander gemein haben. Man sagt: „sie schneiden sich in einem einzigen Punkte."

4) Eine von zwei Punkten begrenzte Linie kann man wegen der Stetigkeit des Raumes beliebig getheilt, folglich auch als eine benannte Zahl sich denken. Eine solche ist daher eine Größe (§. 112. Nr. 1.).

5) Daher steht der Begriff gleicher Linien, der größern und der kleinern Linie (nach §. 112.) fest.

6) Gleiche Linien sind auch kongruente, so oft die Linien gerade sind. (Denn es legt sich dieselbe Einheit gleich oft über einander; daher fallen zuletzt die Endpunkte der Geraden zusammen, in so fern die Richtung dieselbe bleibt.)

§. 115. Schneiden sich zwei Gerade CM und CN (Fig. 1.) in C, laufen sie dabei von C nach M und N hin ohne Ende fort, so begrenzen sie die unendliche Ebene ohne Ende fort, also völlig; und diese einfachste Figur, welche man Zwei-Seit nennen könnte, nennt man Winkel. Die begrenzenden, ohne Ende fortgehenden Geraden CM und CN heißen die Schenkel des Winkels; der Punkt C dagegen wird seine Spitze, oder sein Scheitel-Punkt genannt.

Ein solcher Winkel kann vermöge der Stetigkeit des Raumes durch neue unendliche gerade Linien, welche in derselben Ebene durch seine Spitze gehen, in beliebige Theile getheilt gedacht werden. Er kann also auch als eine (endliche) benannte

Zahl gedacht werden; mithin ist er eine Größe. Nach dem §. 112. steht somit auch der Begriff zweier gleichen Winkel, und des größern und kleinern Winkels fest.

Die Geraden CM und CN bilden allemal zwei Winkel P und Q; sind diese beiden einander gleich, so heißt jeder ein gestreckter Winkel; außerdem heißt der kleinere ein hohler, der größere ein erhabener Winkel.

§. 116. Sind zwei Winkel einander gleich, so sind sie auch kongruent. (Dieselbe Einheit legt sich gleich oft über einander, also fallen zuletzt beide Paare Schenkel der ganzen Winkel auf einander.) — Gestreckte Winkel sind daher einander kongruent. In einem gestreckten Winkel ist deshalb auch der eine der Schenkel allemal zugleich die Verlängerung des andern.

§. 116ª. Nebenwinkel sind zwei solche Winkel, welche die Spitze und einen Schenkel gemein haben, und die zusammen den gestreckten Winkel ausmachen.

Sind die beiden Nebenwinkel einander gleich, so heißt jeder ein rechter. Rechte Winkel sind also die Hälften der gestreckten Winkel, und deshalb auch alle einander gleich. — Von den Geraden, die den rechten Winkel bilden, sagt man: „sie stehen auf einander senkrecht."

Der rechte Winkel wird eingetheilt in 90 Grade, der Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, u. s. w.; so daß der Grad, die Minute und die Sekunde immer kleinere und kleinere Winkel sind*).

Ist der hohle Winkel kleiner als ein rechter, so heißt er spitz; und stumpf wird er genannt, wenn er größer als der rechte ist.

Scheitel-Winkel heißen zwei Winkel, wenn die Schenkel des einen die verlängerten Schenkel des andern sind.

---

*) Es wird aber auch öfter der rechte Winkel in 100 Grade getheilt und der Grad dann ein Centesimal-Grad genannt. Solchen theilt man dann wieder in 10, 100, 1000, etc. etc. Theile, um bequemere Rechnungen zu haben.

§. 117. Zwei Haupt-Lehrsätze.

I. Sind zwei Winkel einander gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel einander gleich.

II. Sind aber die Winkel einander ungleich, so hat der größere davon allemal den kleinern Nebenwinkel.

§. 118. Aus diesen Sätzen folgt unmittelbar und ohne daß ein weiterer Beweis nöthig wäre:

1) Zwei Scheitel-Winkel sind einander gleich.

2) Ist von den 4 Winkeln x, y, z, v (Fig. 2.) einer ein rechter, so sind die übrigen Winkel ebenfalls rechte Winkel.

3) Ist in der (Fig. 3.) der äußere Winkel x größer als der innere Winkel p, so ist auch auf derselben Seite der CD der äußere q größer als der innere y; dagegen sind zu gleicher Zeit auf der andern Seite von CD, die äußern Winkel z, o kleiner als bezüglich ihre innern m, v; d. h. ist $x > p$, so ist $q > y$, $z < m$ und $o < v$.

Unter derselben Voraussetzung sind ferner die Winkel v und m allemal größer als ihre Wechsel-Winkel p und y, d. h. $v > p$ und $m > y$.

Zugleich ist auf der erstern Seite von CD die Summe $x + q$ der äußern Winkel größer als zwei rechte; die Summe der innern $y + p$ dagegen kleiner als zwei rechte; während auf der andern Seite von CD alles umgekehrt ist, nämlich die Summe der äußern Winkel $z + o$ kleiner, die Summe der innern Winkel $v + m$ dagegen größer als zwei rechte.

4) Alles dieses ist gerade umgekehrt, wenn die Linien EF und GH so gegen einander liegen, daß $x < p$ ist.

5) Und ist $x = p$ vorausgesetzt, so sind alle äußern Winkel ihren innern, und alle Paare Wechsel-Winkel einander gleich; auch macht die Summe von je zwei äußern, oder je zwei innern Winkeln, welche auf irgend einer, aber auf einer und derselben Seite von CD liegen, allemal zwei rechte Winkel aus; d. h. ist $x = p$, so ist auch $q = y$, $z = m$, $o = v$, $m = y$, $v = p$, $x + q = 2R$, $y + p = 2R$, $z + o = 2R$ und $v + m = 2R$, wenn R den rechten Winkel vorstellt.

6) Findet irgend eine der in 3. 4. oder 5. gezogenen Folgerungen, als Voraussetzung statt, so finden alle übrigen Angaben derselben Nummer allemal zugleich mit statt.

Es folgt dies alles aber jedesmal unmittelbar aus §. 117.

§. 119. Vier Haupt-Lehrsätze.

III. Ist (Fig. 3.) $x = p$, so schneiden sich die Linien EF und GH nie, obgleich sie auf jeder Seite ohne Ende fortgehen. — Solche Linien heißen aber parallele oder Parallel-Linien.

Man denkt sich CD als die gemeinschaftliche Grenze zweier Figuren und legt die untere dieser Figuren auf die obere, so decken sich beide Figuren, wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Winkel. Bildete daher die eine Figur ein Dreieck, so bildete die andere dasselbe Dreieck, und beide Geraden EF und GH schnitten sich dann oben und unten zugleich, also in zweien Punkten, was gegen §. 114. Nr. 1. ist.

IV. Sind die Linien EF und GH parallel, d. h. schneiden sie sich nie, so ist auch $x = p$. (Steht statt des 11ten Grundsatzes des Euklid; wenn man will, auch als Grundsatz.)

V. Ist $x > p$, so schneiden sich EF und GH auf derselben Seite von CD, wo diese Winkel liegen.

Man beweist zuerst (aus IV.), daß sich die Linien schneiden, indirekt. Man legt dann (wie in III.) die untere Figur auf die obere. Wegen der größern Winkel fällt bei dem Aufeinanderlegen der von CD begrenzten obern und untern Figur, das obere Paar Linien innerhalb des untern Paares, und daraus folgt, wo sich die Linien schneiden.

VI. Schneiden sich 2 Gerade EF und GH (Fig. 3.), und werden solche von einer 3ten Geraden CD wieder geschnitten, so ist auf der Seite von CD, wo EF und GH sich schneiden, jeder äußere Winkel größer als sein innerer. (Indirekt aus III. u. V.)

§. 120. Denkt man sich nun 3 Gerade sich wechselseitig schneidend, z. B. (Fig. 4.), so daß das Dreieck ABC gebildet wird, so kann man den Satz VI. 3mal anwenden, weil immer je zwei der Linien sich schneiden und wieder von der dritten geschnitten werden; daraus folgt aber eine große Anzahl von Ungleichheiten der Winkel, namentlich daß

„der äußere Winkel des Dreiecks, z. B. HAC, größer ist als

jeder der beiden inneren HBC oder ACB des Dreiecks, einzeln."

Denkt man sich aber vom größern Winkel HAC ein Stück Winkel HAK abgeschnitten, welches dem innern Winkel HBC gleich ist, so tritt der Satz III. ein, man erkennt die Linien KAL und BC als parallele, und weil diese nicht bloß von AB, sondern auch von AC geschnitten werden, so erhält man (nach IV.) eine große Anzahl Paare gleicher Winkel, namentlich:

„der äußere Winkel HAC ist gerade so groß als die Summe der beiden innern Winkel ABC und ACB;"

auch noch den

Haupt-Lehrsatz:

VII. In jedem Dreieck ist die Summe aller drei Winkel desselben, zweien rechten Winkeln gleich.

§. 120ª. 1) Ein Dreieck kann daher einen und nur einen rechten Winkel haben; — solches heißt dann rechtwinklig, und die Seiten heißen dann die Katheten, wenn sie den rechten Winkel einschließen; diejenige aber heißt die Hypotenuse, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt.

2) Eben so kann ein Dreieck einen und nur einen stumpfen Winkel haben, und heißt dann stumpfwinklig.

3) Spitzwinklig nennt man dagegen das Dreieck, welches keinen rechten und auch keinen stumpfen Winkel hat.

4) Von einem Punkte, auf eine Gerade, ist nur eine senkrechte möglich. (Man versuche es mit einer zweiten.)

5) Nennt man irgend eine Seite eines Dreiecks die Grundlinie, und fällt man aus der ihr gegenüberliegenden 3ten Ecke eine senkrechte Linie auf sie oder ihre Verlängerung herab, so nennt man diese die, zu dieser Grundlinie gehörige **Höhe**. Jedes Dreieck hat also 3 Höhen. — Diese Höhe fällt nun in die Fläche des Dreiecks hinein, wenn die beiden Winkel an der Grundlinie spitze sind, außerdem aber nicht.

6) Im Viereck ist die Summe aller Winkel gleich 4 rechten Winkeln; im Fünfeck = 6 rechten; im Sechseck = 8 rechten; und überhaupt im nEck, = (2n — 4) rechten.

7) Sind zwei Gerade mit einer dritten parallel, so sind die beiden auch unter sich parallel. — Wird aber eine von 2 Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten, so wird auch die andere der Parallelen von derselben dritten Geraden geschnitten.

Man zieht durch 2 Punkte der beiden äußern dieser 3 Linien eine schneidende Linie, so bekommt man wegen der parallelen Linien gleiche äußere und innere Winkel, und aus der daraus gefolgerten Gleichheit der Winkel erkennt man wieder die Parallelen.

Der ebenen Geometrie

Zweites Kapitel.

Vergleichung der Seiten und Winkel eines Dreiecks. Kongruenz der Dreiecke. Folgerungen.

§. 121. Denkt man sich in einem Dreieck ACB (Figg. 22. 23.) den Winkel C durch eine Linie CD halbirt, und dann den einen Theil desselben um diese CD umgefalzt, so daß er sich auf den andern Theil legt, so überzeugt man sich sogleich aus der Lage, welche die Punkte A und B nach den verschiedenen Voraussetzungen gegen einander einnehmen müssen, von dem Dasein nachstehender

Fünf Haupt-Lehrsätze.

VIII. Sind zwei Seiten AC und BC einander gleich, so sind auch die Winkel B und A, welche diesen Seiten bezüglich gegenüber liegen, einander gleich. — Ein solches Dreieck heißt gleichschenklig.

IX. Ist aber $AC > BC$, so ist W. B $>$ W. A.

X. Ist W. A $=$ W. B, so ist auch $BC = AC$.

XI. Ist W. B $>$ W. A, so ist auch $AC > BC$, d. h. dem größeren Winkel in einem Dreieck liegt auch die größere Seite gegenüber.

XII. In jedem Dreieck ist die Summe von je zwei Seiten größer als die dritte, und natürlich dann auch die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte.

Denn es ist (Fig. 23.) $q > x$, also auch $q > z$, also $BC > BD$; eben so ist aber auch $p > z$, also auch $p > x$, mithin auch $AC > AD$; folglich etc. etc. etc.

§. 122. Daraus folgt:

1) Im gleichseitigen Dreieck sind alle 3 Winkel einander gleich.

2) Im ungleichseitigen Dreieck ist kein Winkel dem andern gleich.

3) Dem stumpfen oder rechten Winkel im Dreieck steht die größeste Seite gegenüber.

4) Der nicht größesten Seite im Dreieck steht immer ein spitzer Winkel gegenüber.

5) Die senkrechte Linie ist die kürzeste, die von einem Punkt nach einer Geraden gezogen werden kann.

6) Ist eine Seite im Dreieck eben so groß oder größer als jede der beiden andern, so sind die beiden ihr anliegenden Winkel nothwendig spitz.

7) Jede zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 5.) gezogene gebrochene Linie ACDEB ist größer als die Gerade AB. (Man hat $AC + CD > AD$, $AD + DE > AE$, $AE + EB > EB$. Diese Ungleichungen muß man addiren.)

8) Daher ist die Gerade AB auch kleiner als jede krumme Linie zwischen A und B.

9) In der Fig. 24., wo D innerhalb des Dreiecks ABC gedacht ist, hat man allemal $AC + CB > AD + DB$, dagegen W. ACB < W. ADB. (Denn es ist $AC + CE > AD + DE$, $DE + EB > DB$.)

10) Daher ist auch (Fig. 25.) $AC + CB >$ als die gebrochene Linie ADEFGB, wenn sie nach AB hin lauter hohle Winkel hat.

11) Daher ist auch $AC + CB$ größer als jede krumme Linie zwischen A und B, so lange sie ihre Konkavität immer gegen AB kehrt.

§. 123. Fünf Hauptsätze der Kongruenz.

Haben zwei Dreiecke einige Seiten oder Winkel, welche in beiden dieselben sind, so lege man diese Dreiecke mit ihren gleichen Stücken auf einander, oder wenn dies nichts fruchten will, neben einander (um gleichschenklige Dreiecke zu bekommen) und man überzeugt sich sogleich von der Wahrheit folgender Sätze:

Zwei Dreiecke sind kongruent:

XIII. wenn eine Seite und zwei ihr anliegende Winkel,

XIV. wenn eine Seite, ein anliegender und der gegenüber liegende Winkel,

XV. wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,

XVI. wenn zwei Seiten und ein Gegenwinkel, welcher der größern Seite gegenüber liegt; endlich

XVII. wenn alle 3 Seiten

in beiden Dreiecken bezüglich einander gleich sind.

Man thut übrigens besser, statt des Satzes (XVI.) folgenden allgemeinern zu setzen, nämlich:

XVI^a. Zwei Dreiecke ABC und DEF (Fig. 26.) sind kongruent, wenn AB=DE, AC=DF und W. C=W. F ist, und wenn zu gleicher Zeit die Summe der andern Gegenwinkel B+E nicht genau zwei rechte ist.

In diesem allgemeinern Lehrsatz steckt dann der Satz XVI. mit, als ein besonderer Fall.

Anmerkung. Die Kongruenz der Dreiecke ist ein fruchtbares Mittel zur Entdeckung neuer geometrischer Wahrheiten. Man muß zu dem Ende in jeder Figur, welche man näher untersuchen will, durch die vorhandenen Punkte Linien sich denken, oder sonst Linien ziehen, welche durch einen vorhandenen Punkt hindurchgehen und welche entweder vorhandene Winkel halbiren, oder auf vorhandenen Linien senkrecht stehen, oder mit vorhandenen Linien parallel laufen, 2c., um wo möglich Dreiecke zu bekommen, in denen drei solche (in XIII.—XVII. genannte) Stücke dieselben oder einander gleich sind. Hat man sonach kongruente Dreiecke, so folgert die Gleichheit der übrigen Stücke dieser

Dreiecke, und zwar derjenigen, welche bei der Deckung auf einander fallen.

Mittelst der vorstehenden 17 Hauptsätze erweist man aber zunächst sehr leicht, alle die in diesem Kapitel noch folgenden Sätze.

§. 124. Das Viereck heißt entweder 1) ein Parallelogramm (wenn es zwei Paare paralleler Seiten hat), oder 2) ein Trapez oder Parallel-Trapez (wenn es nur ein Paar paralleler Seiten hat), oder 3) ein Trapezoid (wenn es gar keine parallelen Seiten hat). — Im Parallelogramm oder Trapez wird der senkrechte Abstand der parallelen Seiten von einander die Höhe genannt; die parallelen Seiten selbst aber heißen dann die Grundlinien.*)

Die Parallelogramme sind entweder schiefe, oder rechtwinklige; im letztern Fall heißen sie auch Rechtecke. Und hat das Rechteck lauter gleiche Seiten, so wird es insbesondere Quadrat genannt. — Hat dagegen das schiefe Parallelogramm lauter gleiche Seiten, so heißt es Rhombus oder Raute; außerdem aber Rhomboid oder längliche Raute.

§. 125. Hat ein Viereck eine der folgenden Eigenschaften, nämlich entweder

1) 2 Paare paralleler Seiten, oder
2) 1 Paar paralleler und gleicher Seiten, oder
3) 2 Paare gegenüber liegender gleicher Seiten, oder
4) 2 Paare gegenüber liegender gleicher Winkel,

so hat es die 3 übrigen dieser Eigenschaften allemal nothwendig mit. Es ist daher jedesmal ein Parallelogramm.

Man zieht jedesmal die Diagonale und benutzt die Kongruenz der entstehenden Dreiecke: daraus folgt dann das Weitere unmittelbar.

Parallele Linien stehen daher allenthalben gleich weit von einander ab, und zu gegebenen Grundlinien eines Parallelogramms oder (Parallel-) Trapezes gehört daher nur eine Höhe.

---

*) Daß zwischen zwei parallelen Linien allenthalben gleiche senkrechte Abstände sind, folgt erst aus §. 125.

§. 126. Im Parallelogramm ist die Summe der beiden an jeder Seite anliegenden Winkel zweien rechten Winkeln gleich; im Trapez dagegen (wo die beiden parallelen Seiten nie einander gleich sein können) ist die Summe der Winkel an der größern der parallelen Seiten **kleiner**, dagegen die Summe der Winkel an der kleinern der parallelen Seiten **größer** als zwei rechte Winkel. (Man trägt die kleinere Seite auf die größere und zieht das Parallelogramm aus. Dann ergiebt sich alles unmittelbar.)

§. 127. 1) Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in beiden bezüglich einander gleich sind.

2) Daher sind zwei Rechtecke schon kongruent, sobald zwei zusammenstoßende Seiten in beide bezüglich einander gleich sind.

3) Zwei Quadrate sind folglich schon kongruent, wenn sie nur eine gleiche Seite haben.

4) Haben daher zwei Quadrate ungleiche Seiten, so ist dasjenige das größere, welches die größere Seite hat.

§. 128. 1) Haben zwei Dreiecke bezüglich gleiche Winkel, ist aber in dem einen Dreieck eine Seite größer als die analoge (homologe) Seite in dem andern, so sind auch die übrigen Seiten in dem ersten Dreieck bezüglich größer als die homologen Seiten in dem andern. (Durch auf einander legen bewiesen.)

2) Haben zwei Dreiecke bezüglich zwei gleiche Seiten, ist aber der eingeschlossene Winkel in dem einen größer als in dem andern Dreieck, so ist auch die dritte Seite im erstern Dreieck größer als im andern.

Man legt die beiden Dreiecke ABD und ABC mit einer ihrer gleichen Seiten (AB) auf einander, so entsteht entweder die (Fig. 24.) oder die (Fig. 27.), während noch aus AC=AD die Ungleichheit von Winkeln abgeleitet wird, aus denen dann (nach §. 121.) die Ungleichheit der dritten Seiten folgt.

3) Ist die dritte Seite in dem einen Dreieck größer als in dem andern, so ist auch der ihr gegenüber liegende Winkel in dem einen Dreieck größer als in dem andern, wenn nur die beiden

andern Seiten in beiden Dreiecken bezüglich einander gleich sind. (Rein indirekt.)

§. 129. Von den rechtwinkligen Dreiecken kann man sich insbesondere noch folgende Sätze merken:

1) Sie sind kongruent, wenn sie irgend zwei gleiche Seiten haben, welche jedoch in beiden homolog liegen.

2) Haben sie nur eine gleiche Kathete, so ist die Hypotenuse und die zweite Kathete und der der letztern gegenüber liegende Winkel in dem einen Dreieck, allemal gleichzeitig größer als die entsprechenden Seiten und der entsprechende Winkel in dem andern, sobald irgend eines dieser drei Stücke in dem einen Dreieck größer ist als in dem andern.

Zum Beweise legt man die Dreiecke mit der gleichen Kathete auf einander.

3) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen, ist aber die eine Kathete in dem einen Dreieck größer als eine Kathete in dem andern Dreieck, so ist die zweite Kathete im erstern Dreieck dann allemal kleiner als im andern.

Zum Beweise legt man die Dreiecke mit der gleichen Hypotenuse so neben einander, daß die Sätze des §. 121. eintreten können.

Der ebenen Geometrie

Drittes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit der Dreiecke und der ebenen Figuren überhaupt.

§. 130. Trägt man auf dem einen Schenkel AX eines Winkels XAZ (Fig. 6.) von der Spitze A aus, gleiche Theile ab, zieht man durch die Theilpunkte beliebige parallele Linien, wovon BC eine vorstellt; zieht man ferner durch diese Theilpunkte C wiederum Parallelen mit AX, so entstehen kongruente Dreieckchen, und man überzeugt sich dann bald von der Richtigkeit nachstehender

Sechs Haupt-Lehrsätze.

XVIII. Wenn in einem Dreieck ADE (Fig. 6.) irgend eine Gerade BC mit der Seite DE parallel gezogen wird, so sind allemal

1) die 3 Quotienten (Verhältnisse §. 105.) aus den 3 Seiten des einen Dreiecks ADE und bezüglich den 3 entsprechenden (homologen) Seiten des abgeschnittenen Dreiecks ABC, alle 3 einander gleich, nämlich

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \text{ oder } AD:AB = AE:AC = DE:BC;$$

2) auch die Quotienten aus den Stücken der Schenkel links und rechts einander gleich, nämlich

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE}, \text{ oder } AB:AC = BD:CE = AD:AE.$$

Man drückt diese Linien als gleichbenannte Zahlen aus; man dividirt nachher (nach §. 112. Nr. 3.) die unbenannten Zahlen durch einander, und man überzeugt sich, daß die Quotienten dieselben werden.*)

XIX. Umgekehrt: Ist in einem Dreieck ADE (Fig. 6.) eine Gerade BC so gezogen, daß entweder

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ oder } \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

ist, so läuft BC mit DE parallel.

Wird indirekt bewiesen, indem man durch B mit DE eine Parallele BZ legt, und (aus XVIII.) nachweist, daß dann AE = AZ ist, also Z mit C zusammenfällt.

XX. Haben zwei Dreiecke ABC und DEF (Fig. 26.) zwei gleiche Winkel A = D, B = E, so sind die 3 Quotienten (Verhältnisse) ihrer 3 Seiten (paarweise genommen) einander gleich (man sagt dann: „es sind alle Seiten proportionirt") d. h. es ist

---

*) Es ist z. B. $AB = 3 \cdot AV$ und $AC = 3 \cdot AW$;
$BD = 2 \cdot AV$ und $CE = 2 \cdot AW$;
endlich $AD = 5 \cdot AV$ und $AE = 5 \cdot AW$.
Ist nun $AV = m$ Zoll und $AW = n$ Zoll, so hat man

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3m}{3n} = \frac{m}{n}; \quad \frac{BD}{CE} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n} \text{ und } \frac{AD}{AE} = \frac{5m}{5n} = \frac{m}{n}.$$

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}, \text{ oder } AB:DE=AC:DF=BC:EF.$$

XXI. Ist in zweien Dreiecken ABC und DEF (Fig. 26.) W. A=W. D, und sind noch die, diese Winkel A und D einschließenden Seiten proportionirt, d. h. ist noch

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}, \text{ oder } AB:DE=AC:DF,$$

so sind alle Winkel bezüglich einander gleich und alle Seiten proportionirt, d. h. es ist dann auch W. B = W. E, W. C=W. F, und noch der dritte Quotient $\frac{BC}{EF}$ ebenfalls den beiden vorstehenden Quotienten gleich.

Die Sätze XX. und XXI. fallen in die Augen (aus XVIII. und XIX.), so wie man die beiden Dreiecke mit ihren gleichen Winkeln A und D in einander gelegt sich denkt.

XXII. Sind in zweien Dreiecken ABC und DEF (Fig. 26.) alle Seiten proportionirt, d. h. sind alle 3 Quotienten

$$\frac{AB}{DE}, \quad \frac{AC}{DF} \quad \text{und} \quad \frac{BC}{EF}$$

einander gleich, so haben die beiden Dreiecke auch bezüglich gleiche Winkel, d. h. es ist auch dann allemal

W. A=W. D, W. B=W. E und W. C=W. F.

Man kann, um dies zu beweisen, dasmal nicht die beiden Dreiecke in einander legen, weil man noch nicht weiß, ob sie einen gleichen Winkel haben. Man kann aber auf den zwei Seiten des einen Dreiecks ABC die beiden entsprechenden (homologen) Seiten des andern abtragen, nämlich (Fig. 28.) AM=DE und AN=DF machen, dann aus der Proportion AM:AB=AN:AC schließen, daß MN mit BC parallel läuft, zuletzt aber aus den Proportionen AM:AB=AN:AC=MN:BC und aus den *gegebenen* Proportionen folgern, daß dieses neue dritte Dreieck AMN auch die dritte Seite des andern habe (nämlich MN=EF), mit dem andern also kongruent sei; und denn folgt das übrige von selbst. — So beweist sich auch der folgende Lehrsatz.

XXIII. Sind in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 26.) zwei Seiten proportionirt, d. h. ist

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}, \text{ oder } AB:DE=AC:DF,$$

sind dagegen nicht die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel,

sondern die beiden Gegenwinkel B und E einander gleich, so sind nur dann alle übrigen Winkel nothwendig bezüglich einander gleich und auch alle Seiten proportionirt, wenn die Summe der beiden andern Gegenwinkel C und F nicht gerade zwei rechte Winkel beträgt.

Man muß jedoch zum Beweis den Satz §. 123. XVIa. zuziehen.

§. 131. Zwei Dreiecke, Vierecke, Vielecke überhaupt, z. B. ABCDEF und abcdef, heißen ähnlich, wenn sie nach der Ordnung bezüglich gleiche Winkel und proportionirte Seiten haben; d. h. wenn

W. A = W. a, W. B = W. b, W. C = W. c, W. D = W. d,
W. E = W. e und W. F = W. f,

und wenn noch

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FA : fa$$

ist. — Hieraus folgt sogleich:

1) Bei Dreiecken sind nur einige dieser Eigenschaften zur Aehnlichkeit wesentlich nothwendig, weil, wenn letztere vorhanden sind, die fehlenden nach den Sätzen des §. 130. zugleich mit vorhanden sein werden.

2) In ähnlichen Vielecken verhalten sich die Umfänge (Perimeter) oder ähnlich genommene Theil-Umfänge, wie ein Paar ähnlich liegender Seiten. (Aus §. 26a. unmittelbar.)

3) Wenn in zwei ähnlichen Vielecken durch gleichnamige Winkel-Spitzen gerade Linien gezogen werden, welche nicht Seiten sind (solche Linien heißen Diagonalen), so entstehen lauter Paare ähnlicher Dreiecke.

Man zeigt nach und nach von jedem Paar dieser Dreiecke, daß ein gleicher Winkel vorhanden ist, und daß die Verhältnisse der ihn einschließenden Seiten in beiden Dreiecken einander gleich sind.

4) Umgekehrt: wenn zwei Vielecke aus ähnlichen Dreiecken bestehen, welche an ähnlich liegenden Winkel-Spitzen und Seiten an einander stoßen, so sind die Vielecke ähnlich (d. h. sie haben lauter gleiche Winkel und lauter proportionirte Seiten).

§. 132. 1) Wird in einem Dreieck ABC (Fig. 7.) der Winkel C durch die Gerade CD halbirt, so ist allemal

$$AC : BC = AD : BD.$$

2) Ist in einem Dreieck ABC eine Seite AB in D so getheilt, daß AC:BC=AD:BD ist, so halbirt die von C nach D gezogene Gerade allemal den Winkel ACB des Dreiecks.

Man verlängert AC, macht die Verlängerung CE der BC gleich, zieht BE, so folgen beide Sätze aus §. 130. XVIII. und XIX.

Der ebenen Geometrie

Viertes Kapitel.

Von der Vergleichung der Flächen bei Dreiecken, bei Parallelogrammen und bei geradlinigen Figuren überhaupt.

§. 133. Für die Vergleichung der Flächen halten wir nachstehende Drei Haupt-Lehrsätze fest.

XXIV. Zwei Parallelogramme sind einander gleich (nicht kongruent), wenn sie gleiche Grund-Linien und gleiche Höhen haben.

XXV. Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn sie gleiche Grund-Linien und gleiche Höhen haben.

XXVI. Ein Dreieck ist die Hälfte von jedem Parallelogramm, das mit ihm gleiche Grund-Linie und gleiche Höhe hat.

Die Parallelogramme legt man mit ihrer einen gleichen Grund-Linie auf einander; man zeigt dann, daß, wegen der gleichen Höhen, die andern beiden Grund-Linien mit ihren Richtungen (aber nicht mit ihren Endpunkten) auf einander fallen müssen. Man findet dann in der Figur (29. 30.) kongruente (also auch gleiche) Dreiecke (ACE=BDF), und dann erkennt man die Gleichheit der Flächen der Parallelogramme, weil sie entstehen, wenn man Gleiches zu Gleichem addirt (Fig. 29.), oder subtrahirt und addirt (Fig. 30.).*)

Die Sätze XXV. und XXVI. fallen aber dann in die Augen, wenn man die vorkommenden Dreiecke (durch Gerade, welche durch 2 Ecken mit 2 Seiten parallel gelegt werden) zu Parallelogrammen ergänzt.

§. 134. Hieraus folgt unmittelbar:

1) Dreiecke oder Parallelogramme, welche zwischen denselben

---

*) Die Gleichheit der Dreiecke kann man nur dadurch beweisen, daß man zeigt, wie sie sich in kongruente Stücke zerlegen lassen. Siehe Ohm's Elementar-Mathematik 2ter Theil 3te Auflage.

Parallelen liegen, und auf derselben Grund-Linie stehen, oder doch gleiche Grund-Linien haben, sind einander gleich; das Dreieck dagegen ist die Hälfte vom Parallelogramm, sobald es mit ihm gleiche Grund-Linie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, so daß es auch dieselbe Höhe hat.

2) Stehen gleiche Dreiecke oder gleiche Parallelogramme (oder Dreiecke und Parallelogramme, von denen die erstern die Hälften der andern sind) auf einer und derselben (gemeinschaftlichen) Grund-Linie, so liegen ihre Spitzen oder ihre zweiten Grund-Linien in einer und derselben Parallele mit der Grund-Linie. (Wird indirekt erwiesen.)

§. 135. Will man diese Verhältnisse der Flächen zweier Dreiecke oder zweier Parallelogramme beurtheilen, so darf man nur die Verhältnisse zweier Rechtecke aufsuchen, weil jedes Dreieck die Hälfte eines Rechtecks ist, das mit ihm dieselbe Grund-Linie und dieselbe Höhe hat, während unter den gleichlautenden Bedingungen jedes Parallelogramm einem Rechteck gleich ist. — Um aber das Verhältniß (den Quotienten §. 105.) zweier Rechtecke zu erhalten, muß man die Rechtecke in benannte Zahlen ausdrücken (indem man die Grund-Linie als eine benannte Zahl ausdrückt, d. h. mißt, folglich theilt, und durch die Theil-Punkte Parallelen mit der Höhe legt) und zuletzt die unbenannten Zahlen durch einander dividiren. So wie man dies ausführt, so überzeugt man sich augenblicklich von der Richtigkeit folgender

Drei Haupt-Lehrsätze.

XXVII. Zwei Rechtecke, welche eine der Seiten bezüglich gleich haben, verhalten sich zu einander, wie die andere (ungleiche) Seite. — Daher verhalten sich auch zwei Dreiecke, welche einerlei Höhe haben, wie ihre Grund-Linien, oder zwei Dreiecke, welche gleiche Grund-Linien haben, wie ihre Höhen.

XXVIII. Zwei Rechtecke und daher auch zwei Dreiecke verhalten sich überhaupt zu einander, wie das Produkt aus Grund-Linie und Höhe des Einen, zu dem analogen Produkt in dem Andern, vorausgesetzt, daß beide Grund-Linien und auch beide Höhen in gleichbenannten Zahlen ausgedrückt gedacht, und

nur die Produkte aus den unbenannten Zahlen verstanden werden. *)

XXIX. Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man seine Grund-Linie mit seiner Höhe multiplicirt; d. h. sind Grund-Linie und Höhe eines Rechtecks mit irgend einer Längen-Einheit E gemessen und als benannte Zahlen ausgedrückt, und multiplicirt man dann diese beiden unbenannten Zahlen mit einander, so erhält man die Zahl, welche, auf das über E konstruirte **Quadrat** als Flächen-Einheit bezogen, die benannte Zahl giebt, durch welche sich die Fläche des Rechtecks ausgedrückt sieht **).

§. 136. So wie man den Inhalt eines Rechtecks finden kann, so hat man, wenn a die Grund-Linie, h die Höhe ist,

1) den Inhalt eines Dreiecks $= \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot h = a \cdot \frac{h}{2}$;

2) den Inhalt eines Parallelogramms $= a \cdot h$.

Ferner findet sich der Inhalt einer jeden andern geradlinigen (ebenen) Figur dadurch, daß man solche in Dreiecke zerlegt und den Inhalt der einzelnen Dreiecke berechnet. Haben je zwei dieser Dreiecke eine gemeinschaftliche Grund-Linie oder eine gemeinschaftliche Höhe, so erhalten die Produkte, welche den Inhalt derselben ausdrücken, einen gemeinschaftlichen Faktor; — die Summe zweier solcher Produkte kann daher mit einer einzigen Multiplikation abgemacht werden (nach §. 14. Nr. 9. oder Nr. 10.). — So findet sich namentlich

3) der Inhalt eines Vierecks ABCD (Fig. 8.), wenn a die Diagonale AC, und h, h′ ihre Abstände BE, DF, von

---

*) Man denkt sich ein drittes Rechteck, welches von dem erstern die eine Seite, von dem andern Rechteck aber die andere Seite hat. Man wendet dann den Satz XXVII. 2mal an, und eliminirt aus beiden Gleichungen das Hülfs-Rechteck.

**) Dies ist kein anderer Satz als der XXVIII., sobald man daselbst als zweites Rechteck das über E konstruirte Quadrat sich denkt.

den beiden gegenüber liegenden Ecken vorstellen, $= a \cdot \frac{h+h'}{2}$ $= \frac{a \cdot (h+h')}{2}$;

4) der Inhalt eines (Parallel-) Trapez, wenn a, b die beiden parallelen Seiten sind, und h dessen Höhe ist, $= \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ $= \frac{a+b}{2} \cdot h$.

§. 137. Wird der Inhalt einer krummlinigen Figur gesucht, so denkt man sich statt der krummlinigen Figur eine vieleckige, welche ihr möglichst nahe kommt, und berechnet den Inhalt der letztern.

Will man bei diesem Verfahren die größtmöglichste Genauigkeit erreichen, so denkt man sich zwei geradlinige Figuren, von denen die eine offenbar kleiner, die andere aber offenbar größer ist, als die gegebene krummlinige Figur. Wenn nun diese beiden Grenzen von einander selbst nur sehr wenig abweichen, so fehlt man doch um noch weniger, wenn man statt des Inhalts der gegebenen krummlinigen Figur den Inhalt einer der beiden Grenz-Flächen nimmt. — Auf solchem Wege kann man also die Grenze des Fehlers angeben, welche derselbe nicht übersteigen kann, während dieser Fehler, nach unserer Willkühr, immer kleiner und kleiner wird, je näher der gegebenen krummlinigen Fläche man diese geradlinigen Grenz-Flächen nimmt.

§. 138. Als Längen-Einheiten hat man die Ruthe, welche in 12 Duodecimal-, oder in 10 Decimal-Fuße eingetheilt wird. — Der Fuß wird wieder in 12 Duodecimal-, oder in 10 Decimal-Zolle getheilt; der Zoll in 12 Duodecimal-, oder in 10 Decimal-Linien, u. s. w.

Zu Flächen-Einheiten werden nun die, über diese Längen-Einheiten konstruirten Quadrate genommen, welche dann bezüglich Quadrat-Ruthe, Quadrat-Fuß, Quadrat-Zoll, Quadrat-Linie heißen.

Im Werkmaaß ist (nach §. 135. XXIX.)

1 Quadrat-Ruthe = 144 Quadrat-Fußen;
1 QuadratFuß = 144 Quadrat-Zollen;
1 Quadrat-Zoll = 144 Quadrat-Linien; u. s. w. f.

Man hat auch andere Flächen-Einheiten, z. B. den **Morgen**, die **Quadrat-Meile**, welche letztere das über der Längen-Meile beschriebene Quadrat ist; u. s. w. f.

Ferner mag hier noch bemerkt stehen, daß der preuß. oder rheinl. Fuß zu dem Pariser Fuß (pied du Roi) sich verhält wie 13913 zu 14400; und daß 1 Metre = 3,0784 pieds du Roi und = 3,1861 rheinl. Fuße ist.

§. 139. Aus der Vergleichung der Flächen geht auch noch der **pythagoräische** Lehrsatz hervor, nämlich

Haupt-Lehrsatz.

XXX. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse AB (Fig. 9.) gerade so groß als die Summe der Quadrate der beiden Katheten, d. h. $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Zieht man aus der Spitze (Fig. 9.) des rechten Winkels die Höhe CD senkrecht auf die Hypotenuse AB, so entstehen zwei kleinere rechtwinklige Dreiecke, welche unter sich und dem ganzen ähnlich sind. Jedes Paar ähnlicher Dreiecke giebt 3 gleiche Quotienten, und wenn man jedesmal einen derselben unbeachtet läßt, so hat man doch noch die 3 Gleichungen (Fig. 9.)

1) $AD : CD = CD : BD$ d. h. $AD \cdot BD = CD^2$;
2) $AD : AC = AC : AB$ d. h. $AD \cdot AC = AC^2$;
3) $BD : BC = BC : AB$ d. h. $BD \cdot AB = BC^2$.

Addirt man aber die 2 letzteren Gleichungen zur Rechten, so erhält man den obigen Satz, nämlich $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Dieser Beweis liefert aber auch noch folgende Sätze.

§. 140. 1) In jedem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Höhe CD die mittlere Proportionale zwischen den beiden abgeschnittenen Stücken AD und BD der Hypotenuse; d. h. das Quadrat über CD ist gerade so groß als das aus AD und BD konstruirte Rechteck.

2) In demselben Dreieck ist jede Kathete AC (oder BC) die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse AB und dem Stücke AD (oder BD) derselben, welches der Kathete AC (oder BC) anliegt, d. h. das Quadrat einer jeden Kathete AC (oder BC) ist dem Rechteck gleich, welches aus der ganzen

Hypotenuse und aus dem Stück AD (oder BD) der letztern konstruirt werden kann.

§. 140ᵃ. 1) Sind a, b, c die 3 Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC (Fig. 15.) oder (Fig. 16.), so ist das Quadrat b^2 einer beliebigen der 3 Seiten allemal größer oder kleiner als die Summe der Quadrate $a^2 + c^2$ der beiden übrigen Seiten, je nachdem der Winkel, den letztere einschließen, stumpf oder spitz ist. Und der Unterschied $b^2 - (a^2 + c^2)$ oder $a^2 + c^2 - b^2$ ist allemal das Doppelte eines Rechtecks aus der einen Seite c (oder a) und dem Stücke q derselben Seite oder ihrer Verlängerung, welches die auf sie gefällte Höhe h abschneidet, und welches nicht an die Seite b anstößt.

Dies folgt aus dem pythagoräischen Lehrsatz, auf die beiden durch die gedachte Höhe gebildeten rechtwinkligen Dreiecke angewandt, und indem man das 2te Stück von c durch $c \pm q$ bezeichnet, aus beiden Gleichungen aber die Höhe h eliminirt.

2) Umgekehrt also: ist in einem Dreieck ABC

$$b^2 = a^2 + c^2,$$

so ist der von a und c eingeschlossene Winkel allemal nothwendig ein rechter.

§. 141. Noch sind von der Vergleichung der Flächen zu merken folgende

Haupt-Lehrsätze.

XXXI. Aehnliche Dreiecke, auch ähnliche Vielecke, verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender (homologer) Seiten.

XXXII. Zwei Dreiecke, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Produkte der (d. h. wie die Rechtecke aus den) Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen.

Man findet die Inhalte der Dreiecke, dividirt solche durch einander, setzt statt des Quotienten der Höhen, den ihm gleichen Quotienten der Seiten, (wenn die Dreiecke nur einen gleichen Winkel haben), oder der Grund-Linien, (wenn die Dreiecke noch einen gleichen Winkel haben, d. h. ähnlich sind), und man hat die Sätze für die Dreiecke. — Für die Vielecke erhält man den Satz dann aus §. 26ᵃ. V., wenn man die Vielecke in (ähnliche) Dreiecke (nach §. 131. Nr. 3.) zerlegt.

Daher ist auch jede auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks beschriebene beliebige Figur, gleich der Summe zweier ihr ähnlichen Figuren, welche auf den Katheten, als ähnlich liegenden Seiten beschrieben sind.

Schluß-Anmerkung.

Von der Commensurabilität und der Incommensurabilität.

Wir müssen den Anfänger noch auf den Umstand aufmerksam machen, daß die Sätze der letztern beiden Kapitel unbedingt voraussetzen, daß je zwei begrenzte gerade Linien in gleich benannte Zahlen ausgedrückt werden können, d. h. daß es für je zwei begrenzte gerade Linien allemal eine gemeinschaftliche Einheit giebt, die in jeder ohne Rest enthalten ist. — Dies ist aber, genau genommen, nicht immer der Fall. — Denken wir uns nämlich (Fig. 46.) im Quadrat ABCD die beiden Diagonalen AC und BD gezogen, welche sich in E schneiden, so ist das Dreieck ABE offenbar die Hälfte des über AE oder BE beschriebenen Quadrats BECF, und der vierte Theil vom Quadrat ABCD; folglich ist das Quadrat ABCD das Doppelte des Quadrats BECF. Wird daher $BE = AE = 1$ gesetzt, so ist $AB^2 = 2$, also $AB = \sqrt{2}$. Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, d. h. nie als eine gebrochene Zahl mit endlichem Zähler und Nenner hergestellt werden kann (vgl. §. 68. sqq.), so folgt hieraus, daß AB und AE nie eine gemeinschaftliche Einheit haben können (welche in beiden begrenzten geraden Linien AB und AE zugleich ohne Rest enthalten wäre).

Solche zwei stetige Größen, für welche keine gemeinschaftliche Einheit existirt (die in beiden Größen zugleich ohne Rest enthalten wäre), nennt man incommensurable Größen. Zwei Größen heißen dagegen commensurable, sobald für sie eine gemeinschaftliche Einheit existirt.

Obgleich aber hiernach alle Sätze der beiden letztern Kapitel nicht allgemein zu gelten scheinen, sondern nur in denjenigen besondern Fällen, in denen die zwei Linien oder die zwei Flächen-Figuren, welche mit einander verglichen werden können, commensurabel sind, so hindert auf der andern Seite doch nichts, die

Einheit sich immer kleiner und kleiner zu denken, so daß, wenn bei dem Messen auch noch Reste bleiben, diese Reste doch immer noch kleiner werden müssen. So sieht man also durch diese letztere Betrachtung zu einer ideellen Einheit geführt, welche nie wirklich hergestellt werden kann, welche wir unendlich klein nennen, und welche als die gemeinschaftliche Einheit der beiden stetigen Größen angesehen werden kann, welche endlich, wenn sie in beiden Größen bezüglich α und βmal enthalten gedacht wird, für α und β unendlich große Zahlen liefert, so aber, daß der Quotient (der Bruch) $\frac{\alpha}{\beta}$ nicht selbst unendlich groß, sondern zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen ist, welche Grenzen man dabei einander so nahe kann rücken lassen, als man nur immer will. — In den Anwendungen wird dann statt des Quotienten (des Verhältnisses) $\frac{\alpha}{\beta}$ einer dieser Grenz-Werthe desselben gesetzt.

Der ebenen Geometrie
Fünftes Kapitel.

Vom Kreise und von den regulären Vielecken.

§. 142. Eine Kreis-Linie (Fig. 10.) entsteht, wenn eine Gerade CA um C in der Ebene sich herumbewegt; der Punkt A beschreibt sie dann. Die Kreis-Linie ist der Umfang des Kreises, heißt daher auch die Peripherie des Kreises. — Sie hat Radien oder Halbmesser, Diameter oder Durchmesser und einen Mittelpunkt C.

1) Alle Radien sind einander gleich.

2) Alle Durchmesser sind einander gleich.

§. 143. Steht eine Gerade DAB in dem Endpunkte A des Radius CA (Fig. 10.) senkrecht auf CA, so liegt jeder Punkt dieser Geraden DB, auf jeder Seite von A beliebig gedacht, vom Mittelpunkte C der Kreis-Linie weiter ab, als der Punkt A absteht (nach §. 121. XI.); er liegt also außerhalb der Kreis-Linie. Eine solche Gerade wird Tangente genannt, und der Punkt A heißt der Berührungs-Punkt.

Steht aber die Linie EAF schief auf dem Radius CA, so ist der senkrechte Abstand CG des Mittelpunktes C von ihr, kleiner als CA; also liegt G innerhalb der Kreis-Linie. Diese Gerade schneidet also die Kreis-Linie in zweien Punkten A und F. Eine solche Gerade wird eine Sekante genannt, und das Stück AF von ihr heißt Sehne oder Chorde.

§. 144. Man erkennt und beweist leicht (meist aus der einfachen Kongruenz der Dreiecke, oder aus dem pythagoräischen Lehrsatze):

1) Wenn die Sehne AF in G halbirt ist, so steht der durch G gelegte Radius CGH auf ihr senkrecht.

2) Wenn der Radius CGH auf der Sehne AF senkrecht steht, so halbirt er letztere in G.

3) Wenn die Sehne AF in G halbirt ist, und dann von G aus eine senkrechte Linie auf AF errichtet wird, so fällt solche mit dem Radius CGH zusammen.

Daher findet man den Mittelpunkt der Kreis-Linie, welche „um ein Dreieck AFL beschrieben" werden kann, wenn man zwei Seiten desselben halbirt und aus den Halbirungs-Punkten auf diese Seiten senkrechte Linien errichtet und diese sich schneiden läßt.

4) Wenn ein Radius senkrecht auf eine Tangente gelegt wird, so geht er durch ihren Berührungs-Punkt.

5) Wenn in dem Berührungs-Punkte A einer Tangente DB, auf die Tangente eine Senkrechte errichtet wird, so fällt solche mit dem Radius AC zusammen, d. h. sie geht durch den Mittelpunkt C.

6) Zwei gleiche Sehnen stehen vom Mittelpunkte gleich weit ab; und zwei Sehnen, welche vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, sind einander gleich.

7) Die größere Sehne liegt dem Mittelpunkte näher als eine kleinere; und die dem Mittelpunkte näher liegende Sehne ist auch allemal die größere (versteht sich, in einem und demselben Kreise).

8) Zwei sich schneidende Tangenten DA und DB (Fig. 31.)

sind allemal einander gleich, vom Durchschnitts-Punkt D bis zu den Berührungs-Punkten A und B gerechnet. — Wird dieser Tangenten-Winkel ADB halbirt, so geht die Halbirungs-Linie durch den Mittelpunkt.

Daher findet man den Mittelpunkt des Kreises, „der in das Dreieck DEF beschrieben werden kann", wenn man zwei Winkel des Dreiecks halbirt und die Halbirungs-Linien sich schneiden läßt.

9) In einem um den Kreis beschriebenen Viereck EFGH, d. h. wenn alle 4 Seiten des Vierecks Tangenten sind, sind daher die Summen je zweier gegenüber liegender Seiten einander gleich, d. h. es ist EG + FH = EF + GH.

§. 145. Kreisbogen sind Theile der Kreis-Linie. Zu einem Kreisbogen AHF (Fig. 10.) gehört allemal **ein** Centri-Winkel oder Mittelpunkts-Winkel ACF, und unzählig viele Peripherie-Winkel oder Umfangs-Winkel AKF, ALF, AMF, etc. etc. etc.; ferner ein Kreis-Ausschnitt oder Sektor AHFCA, und ein Kreis-Abschnitt oder Segment AHFGA.

Zu jeder Sehne AF gehören aber immer zwei Kreisbogen AHF und AKLMF. Ist der Kreisbogen der 4te, 6te, oder 8te Theil der Kreis-Linie, so heißt er Quadrant, Sextant, oder Octant.

§. 146. Man erkennt sogleich die Wahrheit folgender Sätze:

1) Sind zwei Kreisbogen, die einen und denselben Radius haben, einander gleich, so sind sie auch kongruent.

2) Zu zwei gleichen Centri-Winkeln in einem und demselben Kreise, oder in zwei Kreisen, welche denselben Radius haben, gehören auch gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Sektoren und gleiche Segmente.

3) Dem größern Centri-Winkel (in demselben Kreise) gehört dagegen ein größerer Bogen (eine größere Sehne aber nur dann, wenn dieser größere Centri-Winkel hohl ist), ferner ein größerer Sektor und ein größeres Segment an.

4) Zu gleichen Sehnen gehören auch gleiche Centri-Winkel, also auch gleiche Bogen.

5) Dagegen hat die größere Sehne auch den größern hohlen, aber den kleinern erhabenen Centri-Winkel, daher auch den größern oder kleinern Bogen. — Alles in einem und demselben Kreise oder in zweien Kreisen, welche denselben Radius haben.

Außerdem gilt noch folgender

Haupt-Lehrsatz.

XXXIII. In einem und demselben Kreise verhalten sich zwei Centri-Winkel wie die zugehörigen Bogen, auch wie die zugehörigen Sektoren (aber nicht wie die zugehörigen Sehnen, und auch nicht wie die zugehörigen Segmente).

Dieser Satz wird, wie alle ähnlichen Sätze, dadurch bewiesen, daß man die Centri-Winkel als benannte Zahlen ausdrückt, dadurch auch die Bogen und Sektoren als benannte Zahlen herstellt, und die Verhältnisse (Quotienten) wirklich bestimmt; wo dann ihre Gleichheit offenbar wird.

§. 147. Ehe wir zwei Kreise mit einander vergleichen, geben wir erst noch den nachstehenden

Haupt-Lehrsatz.

XXXIV. In jedem Kreise ist jeder zu einem Bogen gehörige Peripherie-Winkel allemal halb so groß als der zu demselben Bogen gehörige Centri-Winkel. — Alle zu einem und demselben Bogen gehörigen Peripherie-Winkel sind daher einander gleich.

Man zeigt, daß der Satz richtig ist für den Fall (Fig. 10.), wo AMF der Peripherie-Winkel ist; dann findet man, daß der Satz auch für ALF, und auch für AKF gilt, wenn man nur an die vorhandenen unendlichen Geraden LC und KC denkt, und somit bemerkt, daß der einfachere Fall hier immer 2mal erscheint, so daß man die durch ihn gegebenen Gleichungen zuletzt nur noch addirt oder subtrahirt.

§. 148. Aus diesem Hauptsatze zieht man eine große Menge der wichtigsten Folgerungen. Wir heben von allen heraus:

1) Wenn Winkel auf derselben Linie AB stehen (d. h.

wenn die Schenkel durch A und B gehen) und dabei einander gleich sind, so liegen ihre Spitzen alle in einer und derselben durch die Punkte A und B gehenden Kreis-Linie.

2) In einem Viereck im Kreise ist die Summe je zweier gegenüber liegender Winkel genau zwei rechte.

3) Und wenn in einem Viereck die Summe je zweier gegenüber liegender Winkel zweien rechten Winkeln gleich ist, so kann man um dieses Viereck eine Kreis-Linie beschreiben, außerdem aber nicht.

4) Jeder zu einem Halbkreis gehörige Peripherie-Winkel ist ein rechter Winkel. — Ist der Bogen größer oder kleiner als der Halbkreis, so ist der zugehörige Peripherie-Winkel stumpf oder spitz.*)

5) Der Winkel BAF, welchen eine Tangente AB mit einer durch ihren Berührungs-Punkt A gelegten Sehne AF macht, ist allemal so groß, als jeder zum Bogen AHF gehörige Peripherie-Winkel, und halb so groß, als der zu dem Bogen AHF gehörige Centri-Winkel ACF.

Dies folgt aus den rechten Winkeln BAM und AFM.

§. 149. Besonders wichtig sind folgende Wahrheiten:

1) Zieht man zwei Sehnen AB und CD im Kreise, welche innerhalb oder außerhalb des Kreises (in ihrer Verlängerung) in einem Punkte E sich schneiden, so ist allemal (Fig. 11.)

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE \text{ oder } AE : CE = DE : BE,$$

und man sagt, „die Stücken der Sehnen, vom Durchschnitts-Punkte E an gerechnet, stehen in umgekehrter Proportion" d. h. nicht ihre Verhältnisse (Quotienten), sondern ihre Produkte sind einander gleich.

2) Geht die eine Sehne ECD in die Tangente EF über, so gilt der Satz noch in der Gestalt

$$AE \cdot BE = EF^2 \text{ oder } AE : EF = EF : BE.$$

---

*) Dies ist ein Mittel, um Winkelmaaße zu prüfen.

Man sagt daher: die Tangente EF wäre die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken EA und EB der Sehne.

3) Fällt man aus einem Punkte C (Fig. 9.) einer Kreis-Linie, auf einen beliebigen Durchmesser AB eine Senkrechte CD, so ist 1) CD die mittlere Proportionale zwischen den Stücken AD und BD des Durchmessers; ferner ist 2) jede Sehne AC (oder BC) die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser AB und dem Stück AD (oder BD) desselben, welches der Sehne AC (oder BC) anliegt. (Vgl. §. 140.)

Die Wahrheit dieser Sätze leuchtet aus den ähnlichen Dreiecken hervor, welche wegen der gleichen oder rechten Peripherie-Winkel sich ergeben.

§. 150. Die ganze Kreis-Linie denkt man sich immer in 360, den Quadranten also in 90 Bogen-Grade getheilt. Ein Bogen-Grad ist demnach der 360ste Theil der ganzen Kreis-Linie, und bald größer bald kleiner, je nachdem der Radius, also die Kreis-Linie selbst größer oder kleiner ist. — Der Bogen-Grad wird übrigens in 60 Bogen-Minuten, die Minute wieder in 60 Bogen-Sekunden, u. s. w. getheilt.

Vermöge dieser Annahme hat aber jeder Winkel genau so viele (Winkel-) Grade, Minuten, Sekunden, ꝛc., als ein zwischen seinen Schenkeln mit beliebigem Radius beschriebener Kreis-Bogen solcher (Bogen-) Grade, Minuten, Sekunden, ꝛc., hat. Deshalb kann man einen Winkel mit Hülfe eines Transporteurs (d. h. eines in seine Bogen-Grade eingetheilten Halb- oder Viertels-Kreises) messen.

§. 151. Gehen wir nun zur vergleichenden Betrachtung zweier Kreis-Linien. Sind sie ihrer Lage und Größe nach in der Ebene fest gegeben, so liegen sie entweder ganz aus einander, oder sie berühren sich außen in einem Punkte, oder sie schneiden sich in zwei Punkten, oder sie berühren sich innen in einem Punkte, oder sie liegen ganz in einander.

Im letztern Falle sind sie entweder concentrisch oder excentrisch. In allen Fällen heißt aber die Gerade zwischen den beiden Mittelpunkten die Central-Linie.

Man kann nun erweisen:

1) Berühren sich die beiden Kreis-Linien innen oder außen,

so liegt der Berührungs=Punkt allemal in der Central=Linie. (Wird indirekt bewiesen.)

Schneiden sich zwei Kreise, so daß sie eine gemeinschaftliche Sehne haben, so liegt der Halbirungs=Punkt dieser Sehne allemal in der Central=Linie.

§. 152. Will man zwei Kreise nicht hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage, sondern bloß hinsichtlich ihrer Größe mit einander vergleichen, so muß man sich solchen durch reguläre Vielecke nähern. Ein reguläres Vieleck bekommt man aber immer, wenn die 4 rechten Winkel, welche um den Mittelpunkt herum liegen, durch Radien in beliebig viel gleiche Winkel zertheilt gedacht werden, und wenn man dann die Endpunkte dieser Radien durch gerade Linien verbindet.

1) Ein reguläres Vieleck (Polygon) hat also immer gleiche Seiten und gleiche (Vielecks= oder Polygon=) Winkel; es hat immer einen Mittelpunkt, und es läßt sich immer durch Gerade, welche von seinem Mittelpunkt nach seinen Ecken gedacht werden, in so viele kongruente Dreiecke zerlegen, als es Seiten hat. — In einem solchen Dreieck hat der Winkel am Mittelpunkt (Centri=Winkel) allemal eine, von der Seitenzahl n abhängige Größe, und jeder der beiden andern Winkel des Dreiecks ist die Hälfte vom Vielecks= oder Polygon=Winkel. Alle diese Winkel lassen sich leicht berechnen. Namentlich ist in einem regulären

$$3\text{Eck}, \quad 4\text{Eck}, \quad 5\text{Eck}, \quad 6\text{Eck}, \ldots \quad n\text{Eck},$$

der Centri=Winkel bezüglich

$$120^\circ, \quad 90^\circ, \quad 72^\circ, \quad 60^\circ, \ldots \quad \frac{360^\circ}{n},$$

der Polygon=Winkel dagegen bezüglich

$$60^\circ, \quad 90^\circ, \quad 108^\circ, \quad 120^\circ, \ldots \quad 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

2) Der Mittelpunkt eines regulären Vielecks steht auch von allen Seiten desselben gleich weit ab; folglich kann man aus ihm auch eine Kreislinie sich denken, welche alle Seiten des

Vielecks berührt (welche **in** das Vieleck beschrieben ist, so daß wieder das Vieleck **um** ihn beschrieben genannt wird).

3) Man kann also **in** und **um** einen Kreis ein reguläres nEck konstruirt sich denken. Der Umfang und der Inhalt des erstern sind immer kleiner, — der Umfang und der Inhalt des andern dagegen sind allemal größer, als bezüglich die Kreis-Linie und die Kreis-Fläche*). — Die Umfänge des eingeschriebenen und umschriebenen regulären nEcks sind also immer zwei Grenzen, zwischen denen die Länge der Kreis-Linie liegt, und welche selbst einander immer näher rücken, je größer n ist. Ganz dasselbe gilt von den Inhalten der beiden regulären n Ecke, als Grenzen der Kreis-Fläche.

4) In diesem Sinne ist es nicht unrichtig, wenn man sich den Kreis als ein reguläres Vieleck denkt von unendlich vielen Seiten.

5) Die Seite des regulären 6Ecks im Kreise ist allemal dem Radius r gleich.

6) Die Seite des regulären Vierecks (Quadrats) im Kreise ist allemal $=\sqrt{2r^2}=r\cdot\sqrt{2}$, wenn r den Radius vorstellt. —

7) Die Seite des regulären 10Ecks ist allemal so, daß, wenn man sie durch x, und den Radius durch r bezeichnet, die stetige Proportion

$$r:x=x:r-x$$

zu deren Auffindung dient.

8) Das Quadrat der Seite des regulären 5Ecks ist allemal der Summe der Quadrate aus der Seite des regulären 6Ecks (dem Radius) und der Seite des regulären 10Ecks gleich.

§. 153. Denkt man sich nun zwei reguläre nEcke, so findet man sogleich, daß sie einander ähnlich sind, aber auch, daß die Dreiecke, in welche jedes aus seinem Mittelpunkt zerlegt gedacht wird, einander paarweise ähnlich sind. Aus den hieraus hervorgehenden Proportionen zwischen Seiten und Flächen dieser

*) Für die Umfänge folgen diese Behauptungen unmittelbar aus §. 122. Nr. 8. und Nr. 11.

Dreiecke, in Verbindung mit dem Satz §. 26ᵃ. V., der bei Vielecken immer eine wichtige Rolle spielt, folgert man nun leicht die nachstehenden

Haupt-Lehrsätze.

XXXV. Zwei Kreis-Linien, und zwei Kreis-Bogen derselben, welche zu gleichen Centri-Winkeln gehören, verhalten sich wie ihre Radien.

XXXVI. Zwei Kreis-Flächen, und zwei Sektoren, welche zu gleichen Centri-Winkeln gehören, auch die zwei zugehörigen Segmente, verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Radien.

§. 154. Die Proportionen, welche nach §. 149. Nr. 3. im Kreise statt finden, lassen in jedem Kreise aus der Sehne irgend eines Bogens die Sehne des halben Bogens, also aus der Seite des regulären nEcks allemal die Seite des regulären 2nEcks in demselben Kreise berechnen, wenn der Radius als gegeben angesehen wird. — Die Proportion (Fig. 12.)

$$CG:CF = AG:DF = AB:DE$$

läßt ferner zu jeder Seite AB eines eingeschriebenen nEcks die Seite DE des umschriebenen nEcks finden. — Auf diese Weise kann man in dem Kreise, dessen Radius = 1 ist, aus der Seite des eingeschriebenen regulären 6Ecks, welche dann ebenfalls = 1 ist (nach §. 152. Nr. 5.), nach und nach die Seite des regulären 12-, 24-, 48-, 96-, 192-, 384-, rc. rc. Ecks **in** dem Kreise, und aus jeder wieder die Seite des Vielecks **um** den Kreis berechnen; aus den Seiten kann man aber dann auch die Umfänge berechnen, und so zwei Grenzen finden, zwischen denen die Kreis-Linie liegt. — Auf diesem Wege findet man folgenden

Haupt-Lehrsatz.

XXXVII. In dem Kreise, dessen Radius = 1, ist die Länge π der halben Kreis-Linie so, nämlich

$$\pi = 3{,}141592653589\cdots,$$

wofür man jedoch häufig bloß $\pi = 3{,}14$ setzt, welches zu wenig

ist, oder wofür man (nach Archimed) etwas genauer, aber zu groß, $\pi = 3\frac{1}{7}$ nimmt, oder viel genauer, aber noch zu groß, $\pi = 3{,}1416$, so wie noch genauer, aber zu klein, $\pi = 3{,}14159$ nehmen kann. — Nimmt man nach Adrian Metius $\pi = \frac{355}{113}$, so hat man eine Genauigkeit, welche die 6te Decimal-Stelle erreicht.

§. 155. Hierzu kommt noch der folgende

Haupt-Lehrsatz.

XXXVIII. Der Inhalt eines Kreises wird gefunden, wenn man seinen Umfang (die Kreis-Linie) mit dem Radius multiplicirt und die Hälfte nimmt.

Man denkt sich statt des Kreises ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten, welches aus dem Mittelpunkte in unendlich viele unendlich kleine Dreieckchen zerlegt ist. Dann fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen.

Nun ist man aber in den Stand gesetzt, den Umfang und den Inhalt eines jeden Kreises, dessen Radius r ist, zu finden, indem man die Sätze §. 153. XXXV. und XXXVI. zu Hülfe nimmt. Man kann sich die Resultate noch als Hauptsätze bemerken. Es ist nämlich

XXXIX. der Umfang $= 2r\pi$;

XXXX. der Inhalt $= r^2\pi$;

wo der Umfang $2r\pi$ und der Radius r, in ein und dasselbe Längen-Maaß ausgedrückt sind, während der Inhalt $r^2\pi$ auf das Quadrat dieser Längen-Einheit als Flächen-Einheit sich bezieht.

§. 156. Man findet nun leicht in dem Kreise, dessen Radius r ist, wenn ein beliebiger Centri-Winkel in Graden durch die Zahl n, der dazu gehörige Bogen in dem Längen-Maaße, auf welches sich die Zahl r bezieht, durch die Zahl b, der Inhalt des zugehörigen Sektors im Quadrat dieses Längen-Maaßes (als Flächen-Maaß) ausgedrückt, durch die Zahl s vorgestellt wird,

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ b = \frac{n \cdot r \cdot \pi}{180}; \\ 1)\ s = \frac{n \cdot r^2 \cdot \pi}{360}; \end{array}\right\} \text{also auch } s = \tfrac{1}{2} b \cdot r.$$

Und ist p der ganze Umfang, und F die ganze Fläche des Kreises, so findet sich, außer den (aus §. 155.) schon bekannten Gleichungen,

$$3)\ p = 2r \cdot \pi \quad \text{und} \quad 4)\ F = r^2 \cdot \pi;$$

noch

$$5)\ r = \tfrac{1}{2} p \cdot \frac{1}{\pi} \qquad 6)\ r = \sqrt{F \cdot \frac{1}{\pi}};$$

$$7)\ n = \frac{180 \cdot b}{r} \cdot \frac{1}{\pi}; \text{ und } 8)\ n = \frac{360 \cdot s}{r^2} \cdot \frac{1}{\pi}.$$

Zu diesen letztern Rechnungen ist es bequem, wenn man $\frac{1}{\pi}$ ein für allemal berechnet, nämlich findet

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098, \text{ oder } = 0{,}31831.$$

§. 157. Den Inhalt eines Kreis-Segments findet man aber, wenn man vom Inhalt des Sektors den Inhalt des Dreiecks subtrahirt, oder beide Inhalte addirt. In Fig. 12. ist nämlich Segm. AFBGA = Sektor CAFBC — △ CAB, dagegen Segm. AHBGA = Sektor CAHBC + △ CAB.

Der ebenen Geometrie

Sechstes Kapitel.

Eine Auswahl von geometrischen Sätzen zur Uebung.

Vorerinnerung.

Die nachstehenden Sätze zu erweisen, muß der Anfänger vor allen Dingen

1) die vollständige Figur mit allen ihren Punkten und Geraden sich recht lebendig vorstellen (zeichnen);

2) die Voraussetzungen gehörig beachten und zusehen, welche der

vorangegangenen 40 Hauptsätze hier jedesmal in Anwendung kommen können, um Folgerungen zu ziehen;

3) unter den Folgerungen vorzüglich diejenigen hervorheben, welche dem gewünschten Ziele, nämlich der gemachten Behauptung, immer näher führen.

§. 158. Wird im Viereck ABCD (Fig. 8.) eine Diagonale BD gezogen, welche an sich oder in ihrer Verlängerung der andern Diagonale AC in H begegnet, so verhalten sich allemal die Dreiecke, welche die eine Diagonale bildet, wie die Stücken der andern Diagonale; nämlich

$$\triangle ABD : \triangle CBD = AH : CH$$

(Aus §. 26ª. V. und §. 135. XXVII.)

§. 159. Nimmt man im Innern eines Dreiecks ABC (Fig. 47.) einen beliebigen Punkt D an, zieht man die Geraden AD, BD, CD, welche die gegenüber liegenden Seiten in den Punkten E, F, G schneiden, also in 2, gleiche oder ungleiche Theile theilen, so kann der vorstehende Satz 3 mal angewandt werden, und aus der Verbindung der 3 Gleichungen entsteht das Resultat

$$(\odot)\cdots \qquad AG \cdot BE \cdot CF = BG \cdot CE \cdot AF,$$

d. h. das Produkt dreier dieser Stücke der Seiten, ist dem Produkt der 3 übrigen Stücke gleich, sobald nur die 3 Faktoren eines jeden der beiden Produkte nicht zusammenstoßende Stücke enthalten.

Umgekehrt aber: Nimmt man in zweien Seiten eines Dreiecks ABC, z. B. in AC und BC, zwei ganz beliebige Punkte F und E, in der dritten Seite AB aber einen Punkt G so dazu an, daß die obige Gleichung ($\odot$) statt findet, so schneiden sich die 3 Geraden AE, BF und CE alle 3 in einem und demselben Punkte. (Wird indirekt bewiesen.)

§. 160. 1) Darum schneiden sich alle 3 Höhen eines Dreiecks in einem und demselben Punkte.

2) Daher schneiden sich die 3 Geraden, welche aus den Spitzen ABC eines Dreiecks nach den Halbirungs-Punkten der

gegenüber liegenden Seiten gezogen werden, alle 3 in einem und demselben Punkte.

§. 161. Es seien a, b, c die 3 Seiten eines beliebigen Dreiecks; h, k, l seien die zu den Grund-Linien c, b, a gehörigen Höhen; r sei der Halbmesser des umschriebenen, ϱ der des eingeschriebenen Kreises; endlich drücke $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks aus. — Man findet nun bald aus den Gleichungen, welche der pythagoräische Lehrsatz in den beiden durch die Höhe h gebildeten rechtwinkligen Dreiecken an die Hand giebt, die Resultate

$$1)\ h = \frac{\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}}{2c};$$

und ganz analoge Ausdrücke für k und l;

$$2)\ \triangle = \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.\text{*)}$$

Verbindet man aber damit die Gleichungen

$$\triangle = \tfrac{1}{2}c\cdot h = \tfrac{1}{2}b\cdot k = \tfrac{1}{2}a\cdot l,$$

so ergiebt sich noch

$$2^1)\ \triangle = \frac{h^2\cdot k^2\cdot l^2}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}}$$

und

$$3)\ c = \frac{2h\cdot k^2\cdot l^2}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl((hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}};$$

und ganz analog damit erhält man auch die beiden andern Seiten in die 3 Höhen ausgedrückt. Ferner findet sich aus der bloßen Betrachtung des Dreiecks mit seinem eingeschriebenen Kreise (Fig. 31.)

$$4)\quad \triangle = \frac{(a+b+c)\cdot\varrho}{2},\ \text{also}\ \varrho = \frac{2\triangle}{a+b+c}.$$

---

*) Zur bequemern praktischen Ausrechnung giebt man dieser Gleichung 2. auch nachstehende Form. Man berechnet zuerst $a+b+c=s$, daraus $\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}s$, $\frac{a+b-c}{2}=\frac{1}{2}s-c$, $\frac{a-b+c}{2}=\frac{1}{2}s-b$ $\frac{-a+b+c}{2}=\frac{1}{2}s-a$: und nimmt dann

$$\triangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}s\cdot(\tfrac{1}{2}s-a)\cdot(\tfrac{1}{2}s-b)\cdot(\tfrac{1}{2}s-c)}.$$

Betrachtet man dagegen das Dreieck ABC (Fig. 32) mit seinem umschriebenen Kreise; denkt man sich namentlich aus einer Spitze C desselben einen Durchmesser CDE und eine Höhe CH gezogen, so daß ähnliche (rechtwinklige) Dreiecke entstehen, nämlich $\triangle CBE \backsim \triangle CHA$, so findet sich augenblicklich

5) $2rh = ab$; also $4r \cdot \triangle = abc$,

oder

6) $r = \frac{abc}{4\triangle}$, so wie $\triangle = \frac{abc}{4r}$.

§. 162. 1) Halbirt man im Dreieck ABC (Fig. 13.) einen Winkel C durch die Gerade CE, welche die AB in E trifft, so ist allemal

$$AC \cdot BC = CE^2 + AE \cdot BE.$$

Man muß sich um ABC (Fig. 13.) den Kreis gelegt und dann CE verlängert denken, bis solche dem Kreise in D begegnet. Dann ist $AE \cdot BE = CE \cdot DE = CE\,(CD - CE) = CE \cdot CD - CE^2$; aber wegen $\triangle CEA \backsim \triangle CBD$ ist $CE \cdot CD = AC \cdot BC$; also 2c. 2c.

2) Halbirt man aber die Seite AB in D (Fig. 7.), so findet sich, wenn $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ gesetzt wird,

$$CD^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}c^2. \quad \text{(Aus §. 140}^a\text{. Nr. 1.)}$$

§. 163. Betrachten wir nun ein Viereck im Kreise (Fig. 13.), in welchem also die Summe der gegenüber liegenden Winkel zweien rechten Winkeln gleich ist.

1) Zieht man die beiden Diagonalen AB und CD, und trägt man, um ähnliche Dreiecke zu bekommen, an einer der Ecken, z. B. an A, den einen der beiden (ungleich gedachten) Winkel auf den andern ab, so daß W. DAF = W. CAB wird, so hat man auf's Neue zwei Paare ähnlicher Dreiecke, und die daraus hervorgeenhden Proportionen geben DF und CF. Addirt man diese, so findet man bald

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC + AC \cdot BD,$$

d. h. das Rechteck aus den beiden Diagonalen ist der Summe der Rechtecke aus den beiden Paaren gegenüber liegender Seiten gleich; und dieser Satz heißt der Ptolomäische.

2) Findet man aber den Inhalt der 4 Dreiecke ABC,

ABD, ACD und BCD nach §. 161. Nr. 6., und bemerkt man, daß die Summen je zweier einander gleich sind, so hat man noch diese andere Gleichung

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AC\cdot AD+BC\cdot BD}{AC\cdot BC+AD\cdot BD}.$$

§. 164. Betrachten wir andere Vierecke.

1) Findet man, daß die beiden Diagonalen sich wechselseitig halbiren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

2) Ist in einem Viereck, die eine Diagonale durch die andere halbirt, und sind die Winkel des Vierecks einander gleich, welche dieser halbirten Diagonale gegenüber liegen, so ist das Viereck wiederum ein Parallelogramm. (Wird indirekt erwiesen.)

3) Sind in einem Parallelogramm die beiden Diagonalen einander gleich, so ist solches ein Rechteck.

4) Im Rhombus (Parallelogramm mit 4 gleichen Seiten, aber schiefen Winkeln) stehen die Diagonalen senkrecht auf einander.

5) Halbirt man in einem beliebigen Viereck die 4 Seiten, so sind diese 4 Halbirungs-Punkte die Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen Seiten mit den Diagonalen des Vierecks parallel laufen, und dessen Inhalt halb so groß ist, als der des Vierecks.

6) Zieht man durch die 4 Ecken eines beliebigen Vierecks Parallelen mit den Diagonalen, so entsteht ein Parallelogramm, welches doppelt so groß ist als das Viereck.

7) Halbirt man in einem beliebigen Viereck die beiden Diagonalen, und ist e der Abstand dieser Halbirungs-Punkte, so ist die Summe der Quadrate aller 4 Seiten, um $4e^2$ größer, als die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.*) (Aus §. 162. Nr. 2. dreimal angewandt.)

8) Im Parallelogramm ist $e=0$; also sind diese Quadrat-Summen daselbst einander gleich.

§. 165. 1) Werden zwei beliebig in einer Ebene liegende

---

*) Dieser Satz gilt sogar dann noch, wenn man sich denkt, daß die 4 Eckpunkte des Vierecks nicht in einer und derselben Ebene liegen. Dann ist er aber ein Satz der Körperlehre.

Gerade durch 3 Parallelen geschnitten, so stehen die abgeschnittenen Stücke in Proportion. — Der Satz gilt aber nicht umgekehrt. —

2) Sind aber zwei Parallelen in proportionirte Stücke getheilt, und verbindet man die Theilpunkte nach der Ordnung durch gerade Linien, so schneiden sich alle diese letztern in einem und demselben Punkt, wenn sie nicht alle mit einander parallel laufen.

Der ebenen Geometrie

Siebentes Kapitel.

Geometrisch-algebraische Aufgaben.

§. 166. Die geometrisch-algebraischen Aufgaben unterscheiden sich von den übrigen algebraischen Aufgaben (§. 110.) nur dadurch, daß sie aus dem Gebiete der Geometrie entnommen sind. — Die gesuchten Größen, als benannte Zahlen gedacht, die sich auf eine bestimmt angenommene Einheit beziehen, also die gesuchten unbenannten Zahlen, bezeichnet man durch x, y, z, etc. etc.; die Eigenschaften der geometrischen Figur geben den Ansatz, d. h. so viele Gleichungen, als man braucht, um die Unbekannten x, y, z, etc. etc. alle finden zu können; und zur Auflösung der Gleichungen braucht man die Lehre der unbenannten Zahlen, Kapp. VIII. IX. — In der geschickten Wahl des Unbekannten, der zuerst gefunden werden soll, liegt dabei zuweilen eine Erleichterung der Rechnung.

1) Eine Linie a in zwei Theile x und a — x so zu theilen, daß

$$a:x = x:a - x$$

ist. Dies ist sogleich der Ansatz. Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2} = \tfrac{1}{2}a(-1 \pm \sqrt{5}),$$

wo jedoch x positiv werden muß, weshalb die obern, d. h. die + Zeichen zu nehmen sind.

Man sagt dann: die Linie a wäre in mittlere Proportion getheilt; auch nennt man diese Theilung den goldenen Schnitt.

2) Soll aus dem Inhalt F eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen eine Seite c ist, jeder der beiden gleichen Schenkel x gefunden werden, so hat man den Ansatz

$$\tfrac{1}{2}c \cdot \sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}c^2} = F,$$

woraus

$$x = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{4}c^4 + 4F^2}$$

hervorgeht.

3) Soll aus dem Inhalt F eines gleichseitigen Dreiecks die Seite x desselben gefunden werden, so hat man den Ansatz

$$\tfrac{1}{4}x^2 \cdot \sqrt{3} = F; \quad \text{woraus} \quad x = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}F \cdot \sqrt{3}}.$$

4) Soll aus dem Inhalt s eines Sektors des Kreises, dessen Radius r ist, der Centri-Winkel x in Graden gefunden werden, so hat man den Ansatz (aus §. 156. Nr. 2.).

$$\frac{x}{360} \cdot r^2 \cdot \pi = s, \quad \text{woraus} \quad x = \frac{360 \cdot s}{r^2 \cdot \pi}.$$

Wäre s und x gegeben und sollte der Radius r des Kreises gefunden werden, dessen zum Centri-Winkel x gehöriger Sektor gerade diesen gegebenen Inhalt s hat, so bliebe der Ansatz derselbe, aber man müßte dann die Gleichung nach dem Unbekannten r auflösen, und man erhielte

$$r = \sqrt{\frac{360 \cdot s}{\pi \cdot x}}.$$

5) Ein Punkt A (Fig. 33.) ist vom Mittelpunkt C eines Kreises, dessen Radius r ist, um e entfernt; man soll durch A eine Gerade ABD legen, welche den Kreis in B, D so schneidet, daß die Sehne BD eine gegebene Länge a habe. — Man setzt AB = x, und hat den Ansatz (aus §. 149. Nr. 1.)

$$x \cdot (a + x) = (e - r) \cdot (e + r),$$

woraus

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{e^2 - r^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$$

hervorgeht, während das + Zeichen allein genommen werden muß, weil x nicht negativ sein kann.

6) Aus dem Inhalte F und der Hypotenuse a eines rechtwinkligen Dreiecks, die beiden Katheten x und y desselben zu finden. — Man hat den Ansatz

$$1)\ \tfrac{1}{2}xy = F \quad \text{und} \quad 2)\ a^2 = x^2 + y^2.$$

Die beiden Gleichungen nach x und nach y aufgelöst, geben dann

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - 4F^2}} \text{ und } y = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - 4F^2}},$$

wo die äußern Wurzeln positiv genommen werden müssen, die innern ($\pm \mp$) Zeichen aber so, daß beide obere zugleich oder beide untere zugleich gelten.

7) Aus der Summe a der beiden Katheten, und der auf die Hypotenuse gefällten Höhe b eines rechtwinkligen Dreiecks, die beiden Katheten x und y und die Hypotenuse z dieses Dreiecks zu finden.

Der Ansatz ist

$$x \cdot y = b \cdot z, \quad x + y = a \quad \text{und} \quad z^2 = x^2 + y^2,$$

woraus x, y und z gefunden werden müssen.

Weil aber die Summe der beiden Katheten gegeben ist, so thut man dasmal besser, ihre Differenz δ zu finden, so daß die beiden Katheten selbst durch $\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\delta$ und $\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\delta$, ihr Produkt also durch $\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}\delta^2$, so wie die Summe ihrer Quadrate durch $\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}\delta^2$ ausgedrückt sein wird. Der Ansatz wird nun

$$\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}\delta^2 - b \cdot z \quad \text{und} \quad z^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}\delta^2.$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen, nach den beiden Unbekannten z und δ giebt aber

$$z = -b + \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } \delta = \sqrt{a^2 + 4b^2 - 4b\sqrt{a^2 + b^2}},$$

woraus dann auch noch x und y sich ergeben.

8) Durch einen Punkt E (Fig. 33.) innerhalb eines Kreises, der vom Mittelpunkt C desselben um e entfernt ist, eine Sehne FEG zu legen, so daß die Stücken FE = x und EG = y der Sehne, zu einander sich verhalten, wie die gegebenen Zahlen m und n.

Der Ansatz ist hier (aus §. 149. Nr. 1.)

$$x : y = m : n \quad \text{und} \quad x \cdot y = (r - e) \cdot r + e),$$

woraus folgt:

$$x = \sqrt{\frac{m(r+e)(r-e)}{n}} \text{ und } y = \sqrt{\frac{n(r+e)(r-e)}{m}}.$$

9) In einem Dreieck ist gegeben die Grund-Linie c, die zugehörige Höhe h und das Produkt p der beiden andern Seiten x und y. Man soll letztere finden. —

Der Ansatz ist hier (aus §. 161. Nr. 2.)

$$1) \quad x \cdot y = p$$

und $2)\ 4c^2h^2 = [-c^2 + (x+y)^2] \cdot [c^2 - (x-y)^2]$,
wo die 2. erhalten wird, indem man den Inhalt des Dreiecks doppelt ausdrückt; oder

$3)\ s^2 - d^2 = 4p$ und $4)\ (s^2 - c^2)(c^2 - d^2) = 4c^2h^2$,
wenn s und d die (unbekannten) Summe und Differenz von x und y sind, aus denen nachher x und y selbst gefunden werden. — Man erhält aber

$$s = \sqrt{c^2 + 2p \pm 2\sqrt{p^2 - c^2h^2}};$$

$$d = \sqrt{c^2 - 2p \pm 2\sqrt{p^2 - c^2h^2}}.$$

10) In einem Dreieck sind gegeben die Grund-Linie c und die beiden Höhen k und h, von denen keine ihr zugehört; man soll die zu k und h gehörigen Grund-Linien x und y finden.

Der Ansatz ist dasmal, indem der Inhalt des Dreiecks mehreremal ausgedrückt wird,

$1)\ kx = hy$ und

$2)\ 2kx = \sqrt{(x+y+c)(x+y-c)(x-y+c)(-x+y+c)}$.

Diese Gleichungen aufgelöst geben

$$x = h \cdot \frac{k \cdot \sqrt{c^2 - h^2} \pm h \cdot \sqrt{c^2 - k^2}}{h^2 - k^2};$$

$$y = k \cdot \frac{k \cdot \sqrt{c^2 - h^2} + h \cdot \sqrt{c^2 - k^2}}{h^2 - k^2}$$

11) Der Inhalt J einer Flächen-Figur und sie selber ist gegeben. Man soll den Maaßstab x finden.

Man mißt die Figur mit irgend einer Einheit a, findet den Inhalt F, und hat dann den Ansatz

$$J \cdot x^2 = F \cdot a^2, \quad \text{also} \quad x = a \cdot \sqrt{\frac{F}{J}},$$

wo x und a sich wiederum auf eine gemeinschaftliche Einheit beziehen.

12) Eine Linie a dergestalt in zwei Theile zu theilen, daß der Inhalt des aus diesen Theilen gebildeten Rechtecks der größtmöglichste werde.

Man setze den einen Theil $= \frac{1}{2}a + z$, den andern $= \frac{1}{2}a - z$, so ist der Inhalt $= \frac{1}{4}a^2 - z^2$, also der größeste, wenn $z = o$ ist, d. h. wenn die Linie a halbirt ist.

13) Unter allen gleichschenkligen Dreiecken, welche denselben Umfang 6a haben, dasjenige zu finden, welches den größten Inhalt hat.

Es sei y die halbe Grund-Linie, so ist der Inhalt

$$= \sqrt{3a(3a-2y)y^2}.$$

Setzt man nun hier $y = a - z$, so formt sich dieser Inhalt um in

$$\sqrt{3a(a^3 - z^2(3a-2z))},$$

und dieser Inhalt wird nun offenbar der größeste, wenn $z = o$, also wenn $y = a$, d. h. wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Der ebenen Geometrie

Achtes Kapitel.

Aufgaben der geometrischen Zeichenkunst.

§. 167. Eine sehr nützliche, den Verstand besonders übende Anwendung der Elemente der Geometrie bietet die geometrische Zeichenkunst, in welcher aus gegebenen Stücken eine Linie, oder ein Winkel, oder eine zusammengesetzte Figur gezeichnet werden soll, welche entweder durch diese Stücke völlig bestimmt ist, oder welche außer diesen Stücken noch andere Eigenschaften haben soll. — Bei allen folgenden Aufgaben wird das Zeichnen einer geraden Linie, der Richtung und einer bestimmten Länge nach,

so wie das Zeichnen eines Kreises aus einem gegebenen Mittelpunkte mit einem gegebenen Radius, als möglich vorausgesetzt.

1) Aus 3 Stücken, welche ein Dreieck bestimmen, das Dreieck zu zeichnen.

2) Eine Gerade von gegebener Länge zu halbiren.

Man beschreibt über und unter dieselbe ein gleichschenkliges Dreieck mit beliebiger Seite und verbindet die Spitzen derselben durch eine Gerade.

3) Einen Winkel zu halbiren.

(Wieder mittelst zweier gleichschenkligen Dreiecke, und indem man zwischen den Spitzen derselben die gerade Verbindungs-Linie zieht.)

4) Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte anzutragen. (Man macht kongruente Dreiecke.)

5) Einen rechten Winkel zu zeichnen. (Peripherie-Winkel im Halbkreis.)

6) Auf eine Gerade von einem Punkt in oder außer ihr eine senkrechte Linie zu ziehen.

Ist der gegebene Punkt in der Linie, so darf man nur links und rechts gleiche Stücken abtragen, und dann zwei gleichschenklige Dreiecke darüber und darunter beschreiben. — In dem anderen Falle muß man wieder zwei gleichschenklige Dreiecke konstruiren. Die Verbindungslinie der beiden Spitzen ist dann die gesuchte.

Ist der gegebene Punkt am Ende der Linie in der Linie, so muß man den Satz vom Peripherie-Winkel zu Hülfe nehmen.

7) Durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen Geraden eine Parallele zu legen. — (Man macht gleiche Wechsel-Winkel.)

8) Aus zweien Seiten und dem zwischenliegenden Winkel ein Parallelogramm, also auch ein Rechteck zu zeichnen.

9) Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches einem gegebenen Parallelogramm gleich ist, denselben Winkel, aber eine andere gegebene Seite hat. (Man gründet die Zeichnung auf die Figur 14., in welcher die beiden „Parallelogramme um die Diagonale" BK und KD einander gleich sind.)

10) Zu dreien Linien a, b, c die 4te Proportional-Linie zu zeichnen, d. h. eine Linie x zu zeichnen, welche durch $x = \frac{bc}{a}$ gegeben ist.

Oder zu zweien Linien a und b die dritte Proportionale z zu zeichnen (wo also $z = \frac{b^2}{a}$ ist).

11) Eine Gerade AB (Fig. 34.) von gegebener Länge in mehrere gleiche oder in solche Theile zu theilen, welche sich wie gegebene Linien oder Zahlen verhalten.

Man zieht an die Endpunkte der gegebenen Geraden zwei Linien unter sich parallel, und trägt auf diesen, gleiche oder die proportionirten Stücke so ab, daß, wenn man die in der Ordnung auf einander folgenden Punkte durch Gerade verbindet, letztere alle wieder unter sich parallel sind.

12) Ein Dreieck oder ein Parallelogramm in mehrere gleiche oder proportionirte Theile zu theilen. (Man theilt die Grund-Linien.)

13) Ein Dreieck in ein anderes gleiches Dreieck umzuwandeln, welches dieselbe Grund-Linie, aber einen gegebenen Winkel an selbiger hat, also z. B. auch rechtwinklig ist, oder welches statt des gegebenen Winkels eine 2te gegebene Seite noch hat, oder welches (immer bei derselben Grund-Linie) gleichschenklig noch ist. (Man zieht durch die Spitze eine Parallele mit der Grund-Linie, und giebt dann den neuen Dreiecken dieselbe Höhe.)

14) Ein Viereck oder ein Vieleck in ein gleich großes Dreieck zu verwandeln.

Man schneidet durch die Diagonale ein Dreieck ab, und verwandelt solches (nach Nr. 13.) in ein anderes Dreieck, welches dieselbe Diagonale zur Grund-Linie hat, dessen eine Seite aber die Verlängerung einer Seite der übrigen Figur ist. So entsteht eine Ecke weniger.

15) Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Summe zweier, oder der Summe mehrerer gegebenen Quadrate gleich ist; also x so zu zeichnen, daß $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, oder $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, oder ꝛc. ꝛc. wird. (Wiederholte Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes.)

16) Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich ist; also x so zu zeichnen, daß $z = \sqrt{a^2 - b^2}$, d. h. $z^2 = a^2 - b^2$, oder $a + b : z = z : a - b$ wird. (Ebenfalls durch den Pythagoras.)

17) Ein Dreieck oder Vieleck zu zeichnen, welches einem andern gegebenen Dreieck oder Vieleck ähnlich ist. (Man macht lauter Dreiecke mit bezüglich gleichen Winkeln.)

18) Eine Figur zu zeichnen, welche zweien andern gegebenen ähnlichen Figuren ähnlich und der Summe oder der Differenz derselben gleich ist. (Mittelst des Pythagoräischen Lehrsatzes.)

19) Um und in ein Dreieck eine Kreis-Linie zu zeichnen.

20) Den verlornen Mittelpunkt einer gezeichneten Kreis-Linie wieder zu finden.

21) Einen Kreis zu zeichnen, welcher der Summe oder der Differenz zweier gegebenen Kreise gleich ist. (Pythagoras.)

22) Ein gegebenes Rechteck $a \cdot b$ in ein gleich großes Quadrat x^2 zu verwandeln, d. h. $x = \sqrt{a \cdot b}$ zu zeichnen. — (Man erinnere sich der stetigen Proportion im Kreise.)

23) In und um ein reguläres Vieleck eine Kreis-Linie zu beschreiben. — (Man halbirt zwei der Winkel, so hat man den Mittelpunkt.)

§. 168. Da man eine Linie x zeichnen kann, welche $= a + b$, $= a - b$, $= \frac{a \cdot b}{c}$, also auch $= \frac{1 \cdot b}{c} = \frac{b}{c}$ *), $= \frac{ab}{1} = ab$ *), $= \frac{b^2}{c}$, $= \sqrt{ab}$, $= \sqrt{a^2 + b^2}$, endlich $= \sqrt{a^2 - b^2}$ ist, sobald a, b, c selbst (in Zahlen ausgedrückt) Linien vorstellen, so kann man nun auch gerade Linien zeichnen, welche irgend wie durch einfache oder quadratische Gleichungen gegeben sind. Dagegen reichen Zirkel und Lineal nicht mehr aus, sobald die zu zeichnenden geraden Linien durch kubische oder noch höhere Gleichungen gegeben sein sollten.

Um irgend eine Formel, welche für die Linie x gefunden ist, zu konstruiren, darf man nur suchen, solche in lauter Theile

---

*) Diese beiden Fälle erfordern, daß man einen bestimmten Maaßstab zu Grunde legt, und ohne denselben (also im Sinne der Geometrie der Alten) sind diese beiden Konstruktionen unmöglich.

zu zerlegen, deren Konstruktion dem vorhergegangenen gemäß durchgesetzt werden kann. Diese Zerlegung kann bei einer und derselben Formel auf verschiedene Weise geschehen, und deshalb muß noch in der Ausführung darauf gesehen werden, daß man unter den möglichen Konstruktionen die elegantesten heraus-finde, d. h. diejenigen, welche so wenig wie möglich zu thun geben.

Anmerkung. In manchen Fällen, wo die unmittelbare Konstruktion einer Aufgabe nicht gelingen will, löst man die Aufgabe zuerst algebraisch auf, so daß man für das zu konstruirende eine algebraische Formel erhält, und konstruirt dann letztere nach vorstehender Anleitung.

§. 169. Für das direkte Konstruiren, ohne Zuziehung der Algebra, bemerke man sich noch folgende praktische Regeln:

1) Man denke sich die ganze Figur, welche konstruirt werden soll, und versinnliche sich solche auf dem Papier so gut wie möglich.

2) Man zergliedere nun diese Figur und suche ihre Eigenschaften auf, und namentlich diejenigen, welche sich auf die gegebenen Stücke und auf das Verlangte beziehen.

3) Man verschaffe sich mittelst dieser Eigenschaften für jeden Punkt der Figur zwei Linien, gerade oder Kreis-Linien, in welchen dieser Punkt liegen muß, und welche aus den gegebenen Stücken konstruirt werden können. Jede dieser Linien wird der geometrische Ort dieses Punktes genannt, und ihr Durchschnitts-Punkt ist der gesuchte.

4) Hat man aber alle Punkte der Figur auf diesem Wege gefunden, so kann die Figur als konstruirt angesehen werden.

§. 170. Diese Regeln mögen nun an folgenden Aufgaben noch insbesondere eingeübt werden.

1) Ein Dreieck in ein anderes gleiches Dreieck zu verwandeln, welches eine gegebene Höhe h hat, *)

*) Ist G die Grund-Linie, H die Höhe des gegebenen, und sind g, h die Grund-Linie und Höhe des gesuchten Dreiecks, so muß $G \cdot H = g \cdot h$, also $h : H = G : g$ werden.

2) und welches auch noch eine gegebene Seite a, oder statt dieser einen gegebenen Winkel w hat,

3) oder welches noch gleichschenklig ist.

4) Ein Dreieck in ein anderes gleiches zu verwandeln, welches eine gegebene Höhe h, und an der Spitze einen gegebenen Winkel v hat (Peripherie-Winkel).

5) Eine Gerade a durch den goldenen Schnitt zu theilen, d. h. in stetige Proportion, nämlich so in zwei Theile x und $a-x$ zu theilen, daß $a:x=x:a-x$ ist.

6) Ein Quadrat x^2 zu zeichnen, welches sich zu einem gegebenen Quadrat a^2 verhält, wie die Linien oder die Zahlen m und n sich zu einander verhalten.

Ist (Fig. 9.) CD senkrecht auf dem Durchmesser AB, so hat man allemal

$$AD:CD=CD:BD, \text{ also } AD^2:CD^2=CD^2:BD^2,$$

oder, wenn man statt CD^2 das gleiche Produkt $AD \cdot BD$ setzt,

$$1)\quad AD^2:CD^2=AD:BD=CD^2:BD^2.$$

Ferner ist

$$AD:AC=AC:AB, \text{ also } AD^2:AC^2=AC^2:AB^2,$$

oder, wenn man statt AC^2 das ihm gleiche Produkt $AD \cdot AB$ setzt,

$$2)\quad AD^2:AC^2=AD:AB=AC^2:AB^2.$$

In diesen Resultaten (1. und 2.) findet die Aufgabe ihre vollkommenste Erledigung.

7) Eine Figur φ zu zeichnen, welche einer gegebenen Figur F ähnlich ist, und welche sich zu F verhält, wie m zu n.

Da sich ähnliche Figuren, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, so führt diese Aufgabe zu der vorhergehenden zurück.

8) So läßt sich also auch die Aufgabe lösen: Ein Dreieck durch Parallelen in Theile zu theilen, welche entweder einander gleich sind, oder sich wie gegebene Zahlen oder Linien verhalten.

§. 171. Eine neue Reihe von Aufgaben:

1) Von einem Punkte aus, der in oder außerhalb einer Kreis-Linie liegt, eine Tangente an letztere zu ziehen.

2) Eine Gerade zu ziehen, welche zwei, ihrer Lage nach gegebene Kreis-Linien zugleich berührt.

3) Ein Quadrat zu zeichnen, welches halb so groß ist, als ein gegebenes Quadrat a^2.

4) In einer Geraden soll man einen Punkt C finden, welcher von zweien außerhalb derselben liegenden gegebenen Punkten A und B gleich weit abliegt; — oder

5) der so liegt, daß AC und BC mit der gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden.

6) Durch einen Punkt D (Fig. 35.) in der Fläche eines Winkels

ACB, eine Gerade so zu legen, daß, wenn sie die Schenkel in A und B schneidet, dann AD = BD; oder

7) daß AD = n · BD, oder daß AD : BD = m : n ist, wo m und n gegebene Zahlen sind,

8) oder daß ABC ein gleichschenkliges Dreieck werde.

9) Durch einen Punkt H eine Gerade so zu legen, daß die von zwei gegebenen Punkten auf sie gefällten Senkrechten, auf beiden Seiten von H gleiche Stücke abschneiden.

10) Es sind gegeben zwei Gerade AB und CD, welche sich in einem Punkte (außerhalb des Papiers) schneiden würden, deren Durchschnitts-Punkt man aber nicht hat. Man soll eine Gerade ziehen, welche verlängert, durch denselben Durchschnitts-Punkt gehen und den Winkel daselbst halbiren würde; oder

11) man soll durch einen gegebenen Punkt F eine solche Linie legen, welche verlängert, durch diesen (unbekannten) Durchschnitts-Punkt gehen muß.

12) Aus der Grund-Linie a eines Dreiecks, dem Winkel α an der Spitze, und dem Radius r des eingeschriebenen Kreises das Dreieck zu verzeichnen.

13) In einer gegebenen Kreis-Linie einen Punkt P (Fig. 36.) so zu finden, daß, wenn man nach gegebenen Punkten A und B die Geraden PA und PB zieht, welche die Kreis-Linie in den Punkten C und D schneiden, die Geraden CD und AB mit einander parallel laufen.

14) Ein beliebig gegebenes Dreieck in ein gleich großes gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Man zieht zuerst über der Grund-Linie ein gleichseitiges Dreieck, welches sich zu dem gegebenen verhält wie ihre (bekannten) Höhen. Dann erst sucht man ein zweites gleichseitiges Dreieck, welches sich zu dem erstern eben so verhält (nach §. 170. Nr. 7.).

15) Ein gegebenes Dreieck in mehrere gleiche Theile zu theilen, und zwar durch Gerade, die mit einer, der Lage nach gegebenen Geraden parallel laufen, oder

16) welche alle durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen, und zwar:
a) wenn dieser Punkt in einer Seite des Dreiecks, b) oder außerhalb, c) oder innerhalb des Dreiecks liegt.

17) In einem Dreieck ABC einen Punkt D so zu finden, daß die 3 Dreiecke ADB, BDC und CDA einander gleich werden.

18) In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat zu zeichnen.

19) Durch einen Punkt A innerhalb oder außerhalb einer Kreis-Linie eine Sehne zu legen, so daß die durch A hervorgebrachten Theile derselben sich zu einander verhalten, wie m zu n.

20) In einer Kreis-Linie soll ein Punkt B so gefunden werden, daß

wenn man nach zwei gegebenen Punkten C und D die Sehnen BC und BD zieht, diese sich zu einander verhalten, wie m zu n.

21) Einen Maaßstab anzufertigen, auf welchem bequem Zehntheile und Hunderttheile der Einheit abzunehmen sind.

Der ebenen Geometrie

Neuntes Kapitel.

Analytische Trigonometrie.

§. 172. Alle rechtwinkligen Dreiecke, welche außer dem rechten Winkel noch einen und denselben Winkel α haben, sind einander ähnlich; also sind die Quotienten (Verhältnisse) ihrer Seiten in allen genau dieselben. — Auf diesen Umstand gründet sich die Elementar-Trigonometrie. —

Sind nämlich a und b die beiden Katheten, und ist c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 48.); ist ferner α der Winkel, welcher der Kathete a **gegenüber** liegt, so nennt man die 6 Quotienten

$$\frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a}$$

der Reihe nach

Sinus, Kosinus, Tangente, Kotangente, Sekante und Kosekante

des Winkels α, bezeichnet sie der Reihe nach durch

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\,\alpha,\ cotg\,\alpha,\ sec\,\alpha \text{ und } cosec\,\alpha,$$

berechnet diese Quotienten (Brüche), für die verschiedenen (spitzen) Winkel α zwischen 0 und 90°, in Decimal-Bruch-Form ausgedrückt, und legt diese Resultate in einer „Sinus-Tafel" oder „trigonometrischen Tabelle" nieder. —

§. 173. So wie dies geschehen ist, so dienen die Gleichungen

$$\text{I.} \quad \frac{a}{c} = \sin\alpha, \ \frac{b}{c} = \cos\alpha, \ \frac{a}{b} = tg\,\alpha, \ \frac{b}{a} = cotg\,\alpha, \text{ etc.}$$

ohne weiteres dazu, um, wenn in einem rechtwinkligen Dreieck

außer dem rechten Winkel noch zwei, das Dreieck bestimmende Stücke gegeben sind, sogleich und unmittelbar jedes 3te Stück desselben berechnen zu können. Man nimmt zu dem Ende jedesmal diejenige der Gleichungen I., welche sowohl die beiden gegebenen Stücke, als das dritte gesuchte enthält. *)

Doch muß man dabei nicht übersehen, daß, wenn β der andere Winkel im rechtwinkligen Dreieck ist, so daß α und β zwei Winkel sind, welche zusammen 90° ausmachen und welche man deshalb Complement-Winkel nennt, dann noch ist

$$\text{II. } \sin\beta = \frac{b}{c},\quad \cos\beta = \frac{a}{c},\quad tg\,\beta = \frac{b}{a},\quad cotg\,\beta = \frac{a}{b}, \text{etc.},$$

woraus auch noch durch Vergleichung

$$\text{III. } \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta, & tg\,\alpha = cotg\,\beta, & \sec\alpha = cosec\,\beta \\ \cos\alpha = \sin\beta, & cotg\,\alpha = tg\,\beta, & cosec\,\alpha = \sec\beta \end{cases}$$

hervorgeht, wenn nur α und β Complement-Winkel sind.

§. 174. Die Lehre der Brüche, namentlich die Sätze:

$$1 : \frac{p}{q} = \frac{q}{p} \quad \text{und} \quad \frac{m}{q} : \frac{p}{q} = \frac{m}{p},$$

geben sogleich die trigonometrischen Relationen

$$\text{I. } \begin{cases} \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}; & cosec\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}; \\ cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha}; & tg\,\alpha = \dfrac{1}{cotg\,\alpha}; \end{cases}$$

$$\text{II. } tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ und III. } cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \text{ u. dgl. m.}$$

Nimmt man den Pythagoräischen Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2$ noch hinzu, und dividirt man solche Gleichung durch c^2, a^2 oder b^2 weg, so erhält man noch die wichtigen Formeln

$$\text{IV. } \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1;\quad \sec\alpha^2 = 1 + tg\,\alpha^2;$$
$$cosec\,\alpha^2 = 1 + cotg\,\alpha^2.$$

---

*) Schiefwinklige Dreiecke werden (durch die Höhe) in zwei rechtwinklige zerlegt, und dann finden, wie das nächste Kapitel zeigt, dieselben Gleichungen augenblicklich wieder unmittelbare Anwendung.

§. 175. Dieselben Sinus und Kosinus kann und muß man aber auch aus einem, zu allgemeinern Begriffen führenden Standpunkte ansehen. Nimmt man nämlich in einem bei C rechtwinkligen Dreieck ACB (Fig. 17.), welches den Winkel α hat, die Hypotenuse AB zur Einheit des Maaßstabes, so hat man $c=1$; -- und $BC=a$ und $AC=b$ sind dann kleiner als 1, messen sich sogleich auf dem Maaßstab in $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ꝛc. ꝛc. der Einheit ab, drücken sich also unmittelbar als Decimal-Brüche aus; — und man hat dann

$$sin\,\alpha=\frac{a}{c}=\frac{a}{1}=a;\quad cos\,\alpha=\frac{b}{c}=\frac{b}{1}=b;$$

d. h. diese Werthe a und b der Katheten sind dann zugleich unsere Sinus und Kosinus des Winkels α.

Denkt man sich nun diesen Winkel α der Null nächst anliegend und dann immer größer werdend, um von 0 an alle spitzen Winkel bis 90° hin zu erhalten, so beschreibt die Hypotenuse $AB=1$ einen Kreis, dessen Radius $=1$ ist. Zieht man nun ED senkrecht auf AE, FG senkrecht auf AF, so entstehen mehrere rechtwinklige Dreiecke, welche alle den Winkel α enthalten, und man hat daher, unter dieser Annahme,

$$sin\,\alpha=BC,\ cos\,\alpha=AC,\ tg\,\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AF}=DE,$$

$$cotg\,\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{BH}{AH}=\frac{FG}{AF}=FG,$$

$$sec\,\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{1}=AD \text{ und } cosec\,\alpha=\frac{AG}{AF}=AG,$$

so daß sich *sin*, *cos*, *tg*, *cotg*, *sec* und *cosec* eines spitzen Winkels als Linien im Kreise, dessen Radius $=1$ ist, versinnlicht sehen.

§. 176. Da ferner mit dem Winkel α in Graden, auch immer die Länge des Bogens $BE=x$ gegeben ist, in so fern α und x durch die Gleichung

$$\alpha:180^{\circ}=x:\pi \text{ oder } \alpha\cdot\pi=180\cdot x$$

mit einander zusammenhängen, so schreibt man häufig *sin* x,

cos x, *tg* x, etc. etc. statt bezüglich *sin α*, *cos α*, *tg α*, etc. etc., versteht aber dann die im §. 172. definirten, d. h. (nach §. 175.) die durch die Linien BC, AC, DE, FG, AD und AG (in dem Kreise Fig. 17., dessen Radius = 1 ist) vorgestellten (ganzen oder) gebrochenen Zahlen darunter.

§. 177. In der höhern Geometrie, welche der Trigonometrie recht gut vorausgeschickt werden kann, beschäftigt man sich unter andern auch mit dem Problem: „Wenn „(Fig. 17.) EB irgend eine Kurve von der Länge x ist, und „die Senkrechte BC die Länge a hat, — zwischen a und x eine „Gleichung zu finden." — Man nennt dieses Problem die „Rektifikation der Kurven." — Für den Fall der Kreis-Linie, deren Radius = 1 ist, erhält man aber, wenn noch AC = b ist, die Resultate

$$1)\; a = \frac{e^{x\cdot\sqrt{-1}} - e^{-x\cdot\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ und } 2)\; b = \frac{e^{x\cdot\sqrt{-1}} + e^{-x\cdot\sqrt{-1}}}{2},$$

wo e den Werth der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \text{ in inf.},$$

also näherungsweise 2,7182818··· vorstellt.

Die Ausdrücke in 1. und 2. zur Rechten der (=) Zeichen haben also die Eigenschaft, daß sie allemal dieselben gebrochenen Zahlen zu Werthen haben, welche wir *sin α*, *cos α*, oder *sin* x, *cos* x genannt haben, so oft statt x eine Zahl, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, d. h. zwischen 0 und 1,57079···· liegt, gesetzt wird. Dieselben Ausdrücke, als bloße Buchstaben-Ausdrücke angesehen, haben aber immer bestimmte Werthe, nicht nur wenn man statt x die Länge eines Kreisbogens setzt (dessen Radius = 1 ist), sondern auch noch, wenn statt x etwas negatives, ja wenn statt x etwas imaginäres gesetzt wird. Darum sind diese Buchstaben-Ausdrücke allgemeiner, und, was wir in den §. §. 172. 175. und 176. unter *sin α*, *cos α*, oder unter *sin* x, *cos* x kennen gelernt haben, das sind blos die Ziffern-Werthe derselben, welche sie in

den seltenern Fällen annehmen, wo statt x nicht nur eine positive Zahl, sondern auch eine Zahl gesetzt wird, die $< \frac{1}{2}\pi$ ist.

§. 178. Deshalb fassen wir den Begriff *sin* x, *cos* x, nun ganz allgemein auf, wenn wir darunter gerade jene Buchstaben-Ausdrücke (im §. 177. Nr. Nr. 1. 2. zur Rechten) selbst verstehen, ohne dem x irgend einen bestimmten Werth zu geben, während wir zu gleicher Zeit unter Sinus, Kosinus irgend eines hohlen (spitzen, rechten, stumpfen) oder erhabenen Winkels α, allemal die Werthe derselben Buchstaben-Ausdrücke verstehen wollen, welche sie liefern, wenn statt x nicht der Winkel α in Graden, sondern die Länge des mit dem Radius 1 beschriebenen und zwischen den Schenkeln des Winkels α liegenden Kreisbogens gesetzt wird, so daß $x = \frac{\alpha\pi}{180}$ genommen werden muß. (Vergl. §. 176.)

§. 179. Da aus der Analysis des Endlichen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \text{ in inf.}$$

beigezogen werden kann, so kann man diese Potenz-Ausdrücke (im §. 177. Nr. Nr. 1. 2. zur Rechten) sogleich selbst in unendliche Reihen verwandeln, und man erhält, dem §. 178. entsprechend,

$$\text{I. } sin\,x = \frac{e^{x\cdot\sqrt{-1}} - e^{-x\cdot\sqrt{-1}}}{2\cdot\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \cdots\text{*)}$$

$$\text{II. } cos\,x = \frac{e^{x\cdot\sqrt{-1}} + e^{-x\cdot\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \cdots.$$

§. 180. Löst man diese beiden Gleichungen I. und II. nach den beiden Potenzen $e^{x\cdot\sqrt{-1}}$ und $e^{-x\cdot\sqrt{-1}}$ algebraisch auf (indem man die I. mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, und zur II. addirt oder von ihr subtrahirt), so erhält man sogleich diese höchst wichtigen Formeln

---

*) Wir schreiben der Kürze wegen 4! statt 1·2·3·4; desgl. 7! statt 1·2·3·4·5·6·7·; u. s. f.

$$\text{III.}\quad e^{x\cdot\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\cdot\sin x;$$

$$\text{IV.}\quad e^{-x\cdot\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\cdot\sin x.$$

Multiplicirt man die Gleichungen III. und IV. mit einander, so erhält man noch für jeden positiven, negativen, reellen oder imaginären Werth von x,

$$\text{V.}\quad \sin x^2 + \cos x^2 = 1 \text{ (vgl. §. 174. IV.).}$$

§. 181. Nimmt man nun beliebige Gesetze der Potenzen, z. B. $e^{(x+y)\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}}.e^{y\sqrt{-1}}$ und $e^{(x-y)\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}}.e^{-y\sqrt{-1}}$, und substituirt man in selbige statt der Potenzen (nach III. und IV.) die Ausdrücke, welche ihnen gleich sind, welche aber Kosinus und Sinus enthalten, so ergeben sich augenblicklich die Hauptsätze

$$\text{I.}\quad \sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y;$$

$$\text{II.}\quad \cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y;$$

$$\text{III.}\quad \sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y;$$

$$\text{IV.}\quad \cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y;$$

woraus noch sogleich (für y = x)

$$\text{V.}\quad \sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x;$$

$$\text{VI.}\quad \cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2 = 1 - 2\sin x^2 = 2\cos x^2 - 1$$

hervorgeht. *)

*) Dieselben Wahrheiten I.—IV. der Buchstabenrechenkunst, da sie allgemein, also auch für Sinus und Kosinus der spitzen Winkel gelten, kann man für letztere natürlich auch aus geometrischen Betrachtungen ableiten. — Nach Fig. 49. ist $\sin(\alpha+\beta) = \frac{BC}{AC} = \frac{CF+BF}{AC} = \frac{CF}{AC} + \frac{DE}{AC}$, während, weil auch W. FCD = W. DAE = α ist, wiederum $\frac{CF}{AC} = \frac{CF}{CD}\cdot\frac{CD}{AC} = \cos\alpha\cdot\sin\beta$ und $\frac{DE}{AC} = \frac{DE}{AD}\cdot\frac{AD}{AC} = \sin\alpha\cdot\cos\beta$ gefunden wird.

Eben so hat man

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AB}{AC} = \frac{AE-DF}{AC} = \frac{AE}{AC} - \frac{DF}{AC},$$

während wiederum gefunden wird

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AD}\cdot\frac{AD}{AC} = \cos\alpha\cdot\cos\beta \text{ und } \frac{DF}{AC} = \frac{DF}{CD}\cdot\frac{CD}{AC} = \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

§. 182. Dieser Hauptsätze I. — VI. des vorstehenden §. 181. bedient man sich nun, um alle *sin* x und *cos* x für alle Werthe von x mit der größesten Leichtigkeit zu bestimmen, oder doch auf die Sinus und Kosinus der Bogen im ersten Quadranten (d. h. der spitzen Winkel) zurückzuführen. Zu dem Ende bestimmt man zuerst Sinus und Kosinus von $\frac{1}{4}\pi$ oder 45°, und von $\frac{1}{6}\pi$ oder 30° aus geometrischen Betrachtungen. — Es ergiebt sich aber, wenn man den Kreis und dessen eingeschriebenes Sechseck zu Hülfe nimmt, augenblicklich

1) $sin\,\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ und 2) $cos\,\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Die Betrachtung des gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecks giebt dagegen sogleich

3) $sin\,\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und 4) $cos\,\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Setzt man nun in §. 181. III. IV. y=x, oder in §. 181. I. II. V. VI. statt x abwechselnd $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, etc. etc, so wie in §. 181. I. II. statt y noch $\frac{1}{2}\pi$, so erhält man

5) $sin\,0 = 0$; 6) $cos\,0 = +1$;
7) $sin\,\frac{1}{2}\pi = +1$; 8) $cos\,\frac{1}{2}\pi = 0$;
9) $sin\,\pi = 0$; 10) $cos\,\pi = -1$;
11) $sin\,\frac{3}{2}\pi = -1$; 12) $cos\,\frac{3}{2}\pi = 0$;
13) $sin\,2\pi = 0$; 14) $cos\,2\pi = +1$;

wobei die Bogen $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π bezüglich den Winkeln von 90°, 180°, 270°, 360° zugehören, so daß also Sinus und Kosinus dieser letztern Winkel nun berechnet sind.

Und allgemein findet sich noch auf demselben Wege, wenn n irgend eine ganze Zahl vorstellt,

---

Aus der Fig. 50. dagegen geht hervor

$$sin\,(\alpha-\beta) = \frac{BC}{AC} = \frac{CF-DE}{AC} = \frac{CF}{AC} - \frac{DE}{AC},$$

während, weil W. DCF = W. DAE = β ist, man wiederum hat

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CF}{DE}\cdot\frac{CD}{AC} = cos\beta\cdot sin\alpha \text{ und } \frac{DE}{AC} = \frac{DE}{AD}\cdot\frac{AD}{AC} = sin\beta\cdot cos\alpha.$$

Endlich ist (in Fig. 50.)

$$cos\,(\alpha-\beta) = \frac{AB}{AC} = \frac{AE+DF}{AC} = \frac{AE}{AC} + \frac{DF}{AC};$$

aber $\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AD}\cdot\frac{AD}{AC} = cos\beta\cdot cos\alpha$ und $\frac{DF}{AC} = \frac{DF}{CD}\cdot\frac{CD}{AC}$ $sin\beta\cdot sin\alpha$.

15) $\sin 2n\pi = 0$ und 16) $\cos 2n\pi = +1$.

§. 183. Um nun den Sinus und Kosinus aller Winkel, die innerhalb der 4 ersten Quadranten liegen, zu berechnen, darf man nur bemerken, daß wenn z jeden spitzen Winkel, oder seinen zugehörigen Bogen vorstellt, dann $\pi - z$ jeden stumpfen, $\pi + z$ jeden Winkel im 3ten Quadranten, so wie $2\pi - z$ jeden Winkel im 4ten Quadranten, oder vielmehr ihre zugehörigen Bogen vorstellen werden. Die Gleichungen §. 181. I.—IV. geben aber in Verbindung mit denen des §. 182. ohne Weiteres

1) $\sin z = +\sin z$; 2) $\cos z = +\cos z$;

3) $\sin(\pi - z) = +\sin z$; 4) $\cos(\pi - z) = -\cos z$;

5) $\sin(\pi + z) = -\sin z$; 6) $\cos(\pi + z) = -\cos z$;

7) $\sin(2\pi - z) = -\sin z$; 8) $\cos(2\pi - z) = +\cos z$;

Hat man daher in einer Tabelle die Sinus und Kosinus aller spitzen Winkel, so geben diese Nummern 1. — 8. sogleich die Sinus oder Kosinus aller Winkel von 0° bis zu 360°; und man sieht zugleich, daß die Sinus im ersten und zweiten Quadranten als positive, im dritten und vierten Quadranten dagegen als negative Zahlen sich ausrechnen; während die Kosinus im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten Quadranten dagegen negativ sich zeigen.

Außerdem findet sich noch (aus §. 181. I. II. in Verbindung mit §. 182. Nr. Nr. 15. 16.), wenn n ganz ist,

9) $\sin(2n\pi + \varphi) = \sin\varphi$ und 10) $\cos(2n\pi + \varphi) = \cos\varphi$, wodurch Sinus und Kosinus aller positiven Zahlen, oder aller Winkel, die größer als 360° gedacht werden*), auf Sinus und Kosinus einer Zahl φ zurückgebracht sind, die $< 2\pi$, d. h. eines Winkels, der innerhalb der vier ersten Quadranten liegt.

§. 184. Um die Sinus und Kosinus aller negativen Zahlen berechnen zu können, setze man in §. 181. III. IV. 0 statt x, und man erhält:

---

*) Eigentlich giebt es keinen solchen Winkel; wenn man sich aber die Winkel α gebildet denkt, dadurch, daß eine Gerade, die zuerst mit einer festen Geraden AE (Fig. 17.) zusammenfällt, sich um den Punkt A stets in einer und derselben Richtung herumdreht, so kann diese beliebig

1) $sin\,(-y) = -sin\,y$ und 2) $cos\,(-y) = +cos\,y$; woraus zugleich hervorgeht, daß die Resultate Nr. Nr. 15. 16. des §. 182., so wie die Nr. Nr. 9. 10. des §. 183., auch gelten, es mag n positiv oder negativ ganz oder Null sein.

Anmerkung 1. Mittelst der §. §. 182.—184. lassen sich also die Sinus und Kosinus aller positiven und negativen Zahlen auf Sinus und Kosinus von x zurückführen, wo x positiv und zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, d. h. auf Sinus und Kosinus aller spitzen Winkel. Letztere lassen sich aber mittelst derselben Hauptsätze §. 181. I.—IV. auf Sinus und Kosinus eines einzigen ganz kleinen Winkels zurückführen, und diese letzteren lassen sich dann aus den Reihen I. II. des §. 179. direkt berechnen.—Bei der wirklichen Berechnung einer Sinustafel für alle spitzen Winkel wendet man dabei noch alle Kunstgriffe an, welche die höhere Analysis an die Hand giebt.

Anmerkung 2. Einen großen Theil der Resultate der §. §. 181.—183. faßt man bequem in folgende sinnliche Darstellung zusammen:

Man denkt sich den Schenkel AE = 1 um A (Fig. 17.) beweglich, anfänglich mit dem festen Schenkel AE zusammenfallend, dann aber nach und nach die verschiedenen Winkel EAB, EAF, EAK, EAJ, EAM, EAN, EAP, etc. etc. beschreibend, welche nach und nach von 0 bis zu 360° hin immer größer und größer werden. Dann fällt der Sinus eines jeden dieser Winkel allemal mit der Länge der Senkrechten zusammen, welche vom Endpunkte des beweglichen Radius auf den festen Radius AE (oder dessen Verlängerung AJ) herabgefällt wird, in Zahl ausgedrückt für den Radius als Einheit des Maaßstabes, aber positiv genommen, so lange diese Gerade oberhalb JAE liegt, negativ genommen, sobald sie unterhalb JAE zu liegen kommt. — Der Kosinus eines jeden dieser Winkel ist

oft mit AE zusammenfallen, und der Punkt, der anfänglich mit E zusammenfiel, kehrt eben so oft in E zurück, beschreibt aber nach und nach die Bogen $2\pi + x$, $4\pi + x$, $6\pi + x$, u. s. w. f., zu denen man sich auch wieder die Centriwinkel $360° + \alpha$, $720° + \alpha$, u. s. w. f. denken kann; immer unter der Voraussetzung, daß AE = 1.

allemal gleich der Länge der Linie, welche die gedachte Senkrechte vom Radius AE oder AJ abschneidet, vom Mittelpunkt A an gerechnet und positiv genommen, wenn solches Stück rechts von A, negativ genommen, wenn solches links von A liegt.

Die Resultate des §. 184. sucht man dadurch zu versinnlichen, daß man den beweglichen Schenkel von AE in entgegengesetzter Richtung sich drehen läßt.

Diese Behauptungen sind aber nur deshalb wahr, weil sie mit den obigen Rechnungs-Resultaten übereinstimmen.

§. 185. Indem man die Gleichungen des §. 174., nämlich

$$tg = \frac{sin\,x}{cos\,x}, \qquad cotg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x},$$

$$sec\,x = \frac{1}{cos\,x}, \qquad cosec\,x = \frac{1}{sin\,x},$$

als Definitionen beibehält, haben auch Tangenten, Kotangenten, Sekanten und Kosekanten eine ganz allgemeine Bedeutung; und zwar sind

im 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Quadranten

die Tangenten und Kotangenten bezüglich

positiv, negativ, positiv, negativ,

die Sekanten dagegen, und die Kosekanten haben jedesmal dieselben Vorzeichen, wie bezüglich die Kosinus und Sinus.

Dabei kann man sich noch bemerken

1) $tg\frac{1}{4}\pi = tg\,45^\circ = 1 = cotg\frac{1}{4}\pi = cotg\,45^\circ$;

2) $tg\frac{1}{2}\pi = tg\,90^\circ = \frac{1}{0}$; $cotg\frac{1}{2}\pi = cotg\,90^\circ = 0$;

3) $sec\,0 = 1$; $cosec\,0 = \frac{1}{0}$;

4) $sec\frac{1}{2}\pi = sec\,90^\circ = \frac{1}{0}$; $cosec\frac{1}{2}\pi = cosec\,90^\circ = 1$;

5) $tg(-x) = -tg\,x$; $cotg(-x) = -cotg\,x$;

6) $tg(\pi - x) = -tg\,x$; $cotg(\pi - x) = -cotg\,x$;*)

---

*) Es haben daher zwei Nebenwinkel genau einerlei Sinus, aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehene, übrigens gleiche Kosinus, Tangenten und Kotangenten.

7) $tg(\pi + x) = + tg\,x$; $cotg(\pi + x) = + cotg\,x$;
8) $tg(2\pi - x) = - tg\,x$; $cotg(2\pi - x) = - cotg\,x$.

Ferner ergeben sich noch ganz allgemein

9) $tg(x + y) = \dfrac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x \cdot tg\,y}$ (aus §. 181. I. II.);

10) $tg(x - y) = \dfrac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y}$ (aus §. 181. III. IV.).

§. 186. Mittelst der Hauptsätze I.—IV. des §. 181. kann man auch Produkte von Sinus und Kosinus unmittelbar in Summen verwandeln. Zu diesem Behufe addirt oder subtrahirt man die angeführten Gleichungen paarweise. Man erhält dann

1) $sin\,x \cdot cos\,y = \frac{1}{2} sin(x + y) + \frac{1}{2} sin(x - y)$;
2) $cos\,x \cdot sin\,y = \frac{1}{2} sin(x + y) - \frac{1}{2} sin(x - y)$;
3) $cos\,x \cdot cos\,y = \frac{1}{2} cos(x - y) + \frac{1}{2} cos(x + y)$;
4) $sin\,x \cdot sin\,y = \frac{1}{2} cos(x - y) - \frac{1}{2} cos(x + y)$.

§. 187. Mittelst derselben Hauptsätze kann man aber auch Summen und Differenzen zweier Sinus und zweier Kosinus wieder in Produkte umformen. Man fragt sich zu dem Ende nur, was man statt x oder y setzen muß, damit in den vorstehenden Gleichungen 1.—4. des §. 186. die Summen und Differenzen zur Rechten der Gleichheits-Zeichen gerade die gegebenen werden. So erhält man

1) $sin\,a + sin\,b = 2\,sin\frac{1}{2}(a + b) \cdot cos\frac{1}{2}(a - b)$;
2) $sin\,a - sin\,b = 2\,cos\frac{1}{2}(a + b) \cdot sin\frac{1}{2}(a - b)$;
3) $cos\,a + cos\,b = 2\,cos\frac{1}{2}(b + a) \cdot cos\frac{1}{2}(b - a)$;
4) $cos\,a - cos\,b = 2\,sin\frac{1}{2}(b + a) \cdot sin\frac{1}{2}(b - a)$.

§. 188. Will man Gleichungen haben, durch welche aus den als bekannt gedachten $sin\,\alpha$ oder $cos\,\alpha$, gefunden werden soll $sin\,\frac{1}{2}\alpha$, $cos\,\frac{1}{2}\alpha$ oder umgekehrt, so darf man nur in den Hauptsätzen §. 181. V. VI. $\frac{1}{2}\alpha$ statt x setzen, und man erhält

1) $sin\,\alpha = 2 sin\frac{1}{2}\alpha \cdot cos\frac{1}{2}\alpha$;

2) $cos\,\alpha = cos\frac{1}{2}\alpha^2 - sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - 2\,sin\frac{1}{2}\alpha^2$
$= 2\,cos\frac{1}{2}\alpha^2 - 1$.*)

*) Vergleiche §. 181. V. und VI.

Aus der 2. folgt dann umgekehrt

$$3)\ \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{und} \quad 4)\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

§. 189. Wir müssen endlich diese allgemeinen analytischen Betrachtungen, zu denen wir jetzt gekommen sind, nicht unbenutzt lassen, und das Ziffern-Rechnen so vervollständigen, wie wir dies in den §. §. 95. 99. für nothwendig gehalten haben.

Ist nämlich aus der imaginären Zahl $a+b\sqrt{-1}$ die m^{te} Wurzel zu ziehen, oder $(a+b\cdot\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$ in einen Ausdruck umzuformen von derselben Form $\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}$, so verfährt man, wie folgt:

1) Man berechnet sich $r = +\sqrt{a^2+b^2}$, so daß man statt r den positiven Werth dieser Quadrat-Wurzel nimmt.

2) Man findet einen Winkel φ, der den beiden Gleichungen $\frac{a}{r} = \cos\varphi$ und $\frac{b}{r} = \sin\varphi$ entspricht. Ein solcher Winkel existirt immer innerhalb der 4 ersten Quadranten; addirt man aber zu diesem noch $2n\pi$, so hat man unendlich viele Werthe von φ, welche denselben Gleichungen genügen.

3) Dann findet man die absolute m^{te} Wurzel aus r, nämlich $\sqrt[m]{r}$, welche immer existirt und durch Anwendung von Logarithmen-Tafeln leicht gefunden wird.

4) Zuletzt aber nimmt man

$(a+b\cdot\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$ oder

$$\sqrt[m]{a+b\cdot\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{m}+\sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\varphi}{m}\right),$$

und man hat alle m Werthe von $\sqrt[m]{a+b\cdot\sqrt{-1}}$, welche alle

aus dem Ausdruck rechts hervorgehen, wenn man statt φ nach und nach seine verschiedenen Werthe setzt.*)

Folgendes ist der Grund. Es ist $\left(e^{x\cdot\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{x}{m}\cdot\sqrt{-1}}$; folglich (nach §. 180. III.)

$$(\cos x + \sqrt{-1}\cdot \sin x)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{x}{m} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{x}{m}.$$

Weil aber $(a + b\cdot\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}\cdot\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}\cdot\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{m}}$

ist, so ist dieser Ausdruck auch $= r^{\frac{1}{m}}\cdot(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^{\frac{1}{m}}$

$$= r^{\frac{1}{m}}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\varphi}{m}\right).$$

Eben so kann man auch $\log(p + q\cdot\sqrt{-1}$ finden, was wir jedoch hier nicht weiter verfolgen wollen.

Wenden wir aber dies auf die Berechnung des Werths von x an aus der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, wie solcher in der sogenannten Cardan'schen Formel

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

ausgedrückt ist, jedoch in dem Falle, wo $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ negativ, und $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = b\cdot\sqrt{-1}$ gefunden wird, wo also b bekannt ist, nämlich die Quadrat-Wurzel aus der positiven Zahl $(-\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)$.

Setzt man nämlich $-\frac{1}{2}q = a$, so wird die obige Formel jetzt so:

$$x = \sqrt[3]{a + b\cdot\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\cdot\sqrt{-1}}.$$

Berechnet man nun $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $(= \sqrt{-\frac{1}{27}p^3})$ und $\sqrt[3]{r}(= \sqrt{-\frac{1}{3}p})$, und nimmt man immer die positiven Werthe der

---

*) Eigentlich gehen unendlich viele Werthe hervor, welche aber auf m verschiedene Werthe sich zurückziehen, die fortwährend periodisch wiederkehren.

Wurzeln; findet man ferner den Winkel φ aus den Gleichungen $\frac{a}{r} = \cos\varphi$ und $\frac{b}{r} = \sin\varphi$, so hat man

$$\sqrt[3]{a + b \cdot \sqrt{-1}} = \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1} \cdot \sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{a - b \cdot \sqrt{-1}} = \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{-1} \cdot \sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

also noch, wenn man addirt:

$$x = 2\sqrt[3]{r} \times \cos\frac{\varphi}{3} = 2 \cdot \cos\frac{\varphi}{3} \cdot \sqrt{-\tfrac{1}{3}p},$$

wonach sich der reelle Werth von x sehr leicht berechnet, wo aber $\sqrt{-\frac{1}{3}p}$ ihren positiven Werth vorstellt, so daß x mit $\cos\frac{\varphi}{3}$ zugleich positiv oder negativ wird. Weil aber φ unendlich viele Werthe hat, so bekommt man unendlich viele Werthe statt x, die jedoch nur 3 verschiedene Werthe enthalten, welche fortwährend periodisch wiederkehren.*)

Der ebenen Geometrie

Zehntes Kapitel.

Ebene Trigonometrie; oder Berechnung ebener Dreiecke.

§. 190. Man präge sich für das rechtwinklige Dreieck die Wahrheiten ein, welche unmittelbar aus den beiden ersten der Gleichungen I. (oder II.) des §. 173. hervorgehen, nämlich:

*) Wer diese Untersuchungen und Rechnungen recht vollständig kennen lernen will, den verweisen wir auf das „System der Mathematik" des 2ten Theiles. 2te Auflage; so wie auf das „Lehrbuch der gesammten höhern Mathematik in zwei Bänden, Leipzig 1839", welches letztere Werk sich besonders für solche eignet, die eine bequeme, kurze und leichtverständliche Uebersicht über die gesammte Mathematik wünschen, ohne das Studium vielbändiger Werke vornehmen zu wollen.

1) Die Hypotenuse mit dem Sinus eines Winkels multiplicirt, giebt immer die diesem Winkel gegenüber liegende Kathete.

2) Die Hypotenuse mit dem Kosinus eines Winkels multiplicirt, giebt jedesmal die diesem Winkel anliegende Kathete. —

Nun gehe man zu den Anwendungen auf schiefwinklige Dreiecke über.

§. 191. Betrachten wir das Dreieck ABC (Fig. 15.), dessen drei Seiten a, b, c, und Winkel α, β, γ sein mögen, so nämlich, daß $BC = a$ dem Winkel $A = \alpha$, ferner $AC = b$ dem Winkel $B = \beta$, endlich $AB = c$ dem Winkel $C = \gamma$ gegenüber liegen. Zieht man nun die Höhe $CD = h$, so zerlegt sich die Grundlinie c in zwei Theile p und q, und das Dreieck ABC, dessen Winkel α und β spitz gedacht sind, in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Drückt man nun die Höhe h (als Kathete in beiden rechtwinkligen Dreiecken), nach §. 190. Nr. 1. doppelt aus, so hat man die Gleichung

$$\text{I. } b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta, \text{ oder } a : \sin\alpha = b : \sin\beta,$$

d. h. die Seiten verhalten sich wie die Sinus der Gegenwinkel. — Drückt man aber die Grundlinie c noch einmal aus, dadurch, daß man die Katheten p und q (nach §. 190. Nr. 2.) bestimmt, so hat man noch

$$\text{II.} \qquad b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta = c.$$

Beide Gleichungen (I. und II.) dienen nun dazu, von den 5 Stücken a, b, c, α, β, irgend zwei berechnen zu lassen, wenn die 3 übrigen gegeben sind. Weil jedoch diese Gleichungen, sobald Winkel als unbekannt angesehen werden, nicht zu den algebraischen Gleichungen gehören, deren Auflösung früher gelehrt worden ist (sondern transcendente Gleichungen sind), so muß man noch den kleinen Kunstgriff gebrauchen und nie die Winkel selbst, sondern immer nur ihre Sinus oder

Kosinus suchen, dann aber nöthigenfalls zu den Gleichungen I. und II. noch die Gleichungen

1) $sin\,\alpha^2 + cos\,\alpha^2 = 1$ oder 2) $sin\,\beta^2 + cos\,\beta^2 = 1$

hinzufügen, um immer so viele Gleichungen als unbekannte Stücke zu haben.

Eliminirt man aus den Gleichungen I. II. und 2. sowohl $sin\,\beta$, als auch $cos\,\beta$, so erhält man sogleich noch

III. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\alpha$.

Die Gleichungen I. und III. enthalten fast alle Anwendungen der ebenen Trigonometrie. Den Satz III. nennen wir den allgemeineren Pythagoräischen Lehrsatz.

§. 192. Ehe man weiter geht, muß man untersuchen, ob die Gleichungen §. 191. I. II., also auch III. noch gelten, wenn der Winkel β nicht mehr spitz ist. — Man findet aber in dem Falle der Figur 16., wo β stumpf, β' aber sein spitzer Nebenwinkel ist, aus der Figur (nach §. 190.)

$b \cdot sin\,\alpha = a \cdot sin\,\beta'$ und $b \cdot cos\,\alpha - a \cdot cos\,\beta' = c$,

und diese letztern Gleichungen sind genau die I. II. des §. 191., da (nach §. 183. Nr. Nr. 3. und 4.) $sin\,\beta = sin\,\beta'$ und $cos\,\beta = -cos\,\beta'$ ist. — Läßt man aber die Gleichungen §. 191. I. II. auch für den Fall gelten, wo β ein rechter Winkel ist, so geben sie, da (nach §. 182. Nr. Nr. 7. 8.) dann $sin\,\beta = 1$ und $cos\,\beta = 0$ ist, sogleich

$b \cdot sin\,\alpha = a$ und $b \cdot cos\,\alpha = c$;

und dies sind in der That dieselben, welche der §. 190. für das bei B rechtwinklige Dreieck unmittelbar liefert, in so fern dann b die Hypotenuse ist, a und c aber die Katheten sind.

Also gelten die Gleichungen I. II. des §. 191. (und somit auch alle die aus ihnen abgeleiteten, namentlich also auch die III. daselbst) für **alle** Dreiecke, die Winkel β und α mögen spitze, rechte oder stumpfe sein.*)

*) Die III. geht, wenn α ein rechter Winkel ist, so daß $cos\,\alpha = 0$

§. 193. Aufgabe. Aus den drei Seiten a, b, c eines beliebigen Dreiecks, die Winkel, die Höhen und den Inhalt Δ möglichst bequem zu berechnen.

Auflösung. Der Satz §. 191. III. giebt augenblicklich

$$1) \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Um aber die Rechnung mittelst der Logarithmen bequem durchführen zu können, so findet man hieraus (nach §. 188. Nr. 3. und 4.):

$$2) \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-a)}{bc}};$$

$$3) \quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-c+b}{4bc}} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}},$$

wenn der größern Bequemlichkeit des Rechnens wegen, die Summe $a+b+c=s$ zuerst berechnet, und diese Summe s der 3 Seiten zur weitern Rechnung benutzt wird. — Aus 2. und 3. folgt noch (vermöge des §. 135.)

$$4) \qquad tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s\cdot(\frac{1}{2}s-a)}},$$

so wie (nach §. 181. V. oder aus §. 174. IV.)

$$5) \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}s\cdot(\frac{1}{2}s-a)\cdot(\frac{1}{2}s-b)\cdot\frac{1}{2}s-c)}}{\frac{1}{2}bc}.\,^{*})$$

---

wird, sogleich in $a^2 = b^2 + c^2$ über, d. h. in den gemeinen Pythagoräischen Lehrsatz. — Setzt man aber statt $b\cdot\cos\alpha$ seinen Werth als Linie, so geht, im Fall α spitz oder stumpf gedacht wird, der Satz III. in bekannte geometrische Sätze über.

*) Diese Formel liefert $\sin\alpha$ oder $\log\sin\alpha$. In der Sinus-Tafel findet sich ein spitzer Winkel dazu. Zieht man diesen von 180° ab, so hat man den stumpfen Winkel, der denselben Sinus hat, der also auch der Winkel α sein kann. Ist a nicht die größte Seite, so muß α spitz sein. Ist aber a die größte Seite, so kann α stumpf sein, und in diesem Falle ist es besser, $\log\sin\frac{1}{2}\alpha$ oder $\log\cos\frac{1}{2}\alpha$ oder $\log tg\,\frac{1}{2}\alpha$ mittelst der Formeln 2. 3. oder 4. zu berechnen, weil $\frac{1}{2}\alpha$ allemal spitz sein muß, während man dann für α einen spitzen oder stumpfen Winkel erhält, je nachdem $\frac{1}{2}\alpha \lessgtr 45°$ gefunden wird.

Aus dem $sin\ \alpha$ findet man die zur Grund-Linie c gehörige Höhe h augenblicklich $= b \cdot sin\ \alpha$, also

$$6) \quad h = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}s \cdot (\tfrac{1}{2}s - a) \cdot (\tfrac{1}{2}s - b) \cdot (\tfrac{1}{2}s - c)}}{\tfrac{1}{2}c},$$

woraus der Inhalt $\triangle$ des Dreiecks sogleich sich ergiebt, nämlich

$$7) \quad \triangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}s \cdot (\tfrac{1}{2}s - a) \cdot (\tfrac{1}{2}s - b) \cdot (\tfrac{1}{2}s - c)}.$$ (Vgl. §. 161.)

§. 194. **Aufgabe.** Aus zweien Seiten b, c und dem eingeschlossenen Winkel α, die dritte Seite a, die übrigen Winkel β, γ, die zur Grund-Linie c gehörige Höhe h, und den Inhalt $\triangle$ des Dreiecks zu finden.

Auflösung. Zuerst wendet man den Satz an

$$1) \quad b + c : b - c = tg\,\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) : tg\,\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),\text{*)}$$

in welchem die 3 ersten Glieder $b + c$, $b - c$, auch $\tfrac{1}{2}(b + \gamma) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha$ bekannt sind, und berechnet sich daraus den Winkel $\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$, wozu Logarithmen bequem verwandt werden können. Addirt man nun die beiden Winkel $\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$ und $\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$, so ist das Resultat der Winkel β; subtrahirt man sie, so hat man den Winkel γ.

Die Seite a findet man dann aus der Gleichung

$$2) \quad b \cdot sin\ \alpha = a \cdot sin\ \beta \quad \text{oder} \quad sin\ \beta : sin\ \alpha = b : a.$$

Zur Probe kann man dasselbe a auch aus der Gleichung

$$3) \quad c \cdot sin\ \alpha = a \cdot sin\ \gamma \quad \text{oder} \quad sin\ \gamma : sin\ \alpha = c : a$$

berechnen.**)

---

*) Aus $\frac{b}{c} = \frac{sin\ \beta}{sin\ \gamma}$ findet man

$$\frac{b}{sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma} = \frac{b + c}{sin\ \beta + sin\ \gamma} = \frac{b - c}{sin\ \beta - sin\ \gamma}.$$

Setzt man nun in den letztern beiden gleichen Brüchen statt $sin\ \beta \pm sin\ \gamma$ ihre Werthe in Produkten ausgedrückt (nach §. 187. Nr. Nr. 1. 2.), so hat man sogleich diese Gleichung 1.

**) Man kann auch zuerst aus der Gleichung

$$1) \quad cos\ \psi = \frac{2 \cdot \sqrt{bc} \cdot cos\ \tfrac{1}{2}\alpha}{b + c},$$

den Winkel ψ berechnen, und nimmt dann

$$2) \quad a = (b + c) \cdot sin\ \psi.$$

Ferner hat man die zur Grund-Linie gehörige Höhe

4) $h = b \cdot sin\ \alpha$; und 5) $\triangle = \frac{1}{2} bc \cdot sin\ \alpha$.

§. 195. Sind zwei Seiten a und b und ein Gegenwinkel α gegeben, so berechnet man aus der Gleichung

$$a : b = sin\ \alpha : sin\ \beta$$

zuerst den $sin\ \beta$ oder $log\ sin\ \beta$, dazu den (spitzen oder stumpfen) Winkel β, und dann $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$; endlich aber berechnet man noch c aus

$$sin\ \alpha : sin\ \gamma = a : c.$$

Aus diesen Stücken berechnen sich zuletzt die Höhe h und der Inhalt $\triangle$ sogleich. — Weil man aber für β zwei Werthe erhält, und zwar wenn α spitz und $b > a$ ist, einen spitzen, der $> \alpha$ ist, und einen stumpfen, — so können in diesem Falle zwei Dreiecke ACB und ACB′ (Fig. 37.) existiren, welche dieselben 3 gegebenen Stücke a, α und b haben.

§. 196. Ist nur eine Seite c gegeben und kennt man dazu noch 2, folglich alle 3 Winkel α, β, γ des Dreiecks, so finden sich die beiden andern Seiten a und b direkt aus den Gleichungen

$$1)\ \frac{a}{sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma}.$$

Dan findet man die zur Grund-Linie c gehörige Höhe

$$2)\ h = \frac{c \cdot sin\ \beta \cdot sin\ \alpha}{sin\ \gamma};$$

und den Inhalt

$$3)\ \triangle = \tfrac{1}{2} c^2 . \frac{sin\ \alpha \cdot sin\ \beta}{sin\ \gamma}.$$

Es ist nämlich (nach §. 191. III.)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\ a = (b+c)^2 - 2bc\,(1 + cos\ \alpha).$$

Weil aber $1 + cos\ \alpha = 2 cos \frac{1}{2}\alpha^2$ ist, so giebt dies

$$a^2 = (b+c)^2 \cdot \left(1 - \frac{4bc \cdot cos\frac{1}{2}\alpha^2}{(b+c)^2}\right) = (b+c)^2 \cdot (1 - cos\ \psi^2)$$
$$= (b+c)^2 \cdot sin\ \psi^2,$$

wenn ψ vorher, der Gleichung 1. zufolge, gefunden ist. — Daraus ergiebt sich aber die 2.

§. 196a. Man kann viele der für das Dreieck gewonnenen Resultate sehr leicht auf das Viereck und auf die Vielecke überhaupt übertragen.

I. So z. B. ist ganz analog dem Satze §. 191. II.

1) im Viereck ABCD (Fig. 44.)

$$b \cdot \cos(b, a) + c \cdot \cos(c, a) + d \cdot \cos(d, a) = a;$$

2) im Fünfeck ABCDE (Fig. 45.)

$$b \cdot \cos(b, a) + c \cdot \cos(c, a) + d \cdot \cos(d, a) + e \cdot \cos(e, a) = a;$$

3) ein analoges Resultat im Vieleck überhaupt; wenn nur unter (b, a), (c, a) etc. etc. die Winkel verstanden werden, welche die Richtungen BC, CD, DE etc. etc. (und nicht die entgegengesetzten Richtungen CB, DC, ED) mit der Richtung BA (und nicht mit der entgegengesetzten Richtung AB) machen, so daß diese Winkel spitz, auch stumpf, folglich die Kosinusse derselben positiv, auch negativ sein werden.

II. Eben so findet sich ganz analog dem Satze §. 191. III.

1) im Viereck ABCD (Fig. 44.)

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + 2bc \cdot \cos(b, c) + 2bd \cdot \cos(b, d) + 2cd \cdot \cos(c, d);$$

2) im Fünfeck ABCDE (Fig. 45.)

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2bc \cdot \cos(b, c) + 2bd \cdot \cos(b, d) + 2be \cdot \cos(b, e) + 2cd \cdot \cos(c, d) + 2ce \cdot \cos(c, e) + 2de \cdot \cos(d, e);$$

3) ein analoges Resultat im Vieleck überhaupt; wenn nur unter (b, c), (b, d), (c, d), etc. etc. die Winkel verstanden werden, welche die genannten Seiten mit einander machen, und zwar die Richtungen BC, CD, DE etc. etc. (und nicht von einer dieser Seiten die entgegengesetzte Richtung gedacht).*)

---

*) Für das Dreieck ABC (Fig. 7.) z. B., sieht derselbe Satz so aus, nämlich

$$AC^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC \cdot \cos(AC, CB),$$

wo unter (AC, CB) der Winkel verstanden wird, welchen die Richtungen ACE und CB mit einander machen, also der Winkel BCE, welcher der Nebenwinkel von ACB ist. Weil aber deshalb $\cos(AC, CB) = -\cos ACB$ ist, so geht die vorstehende Formel in die des §. 191. III. über.

III. Ferner findet sich ganz analog dem Satze §. 194. Nr. 5.

1) der Inhalt des Vierecks ABCD (Fig. 44.)

$=\frac{1}{2}bc \cdot sin(b,c) + \frac{1}{2}bd \cdot sin(b,d) + \frac{1}{2}cd \cdot sin(c,d)$;

2) der Inhalt des Fünfecks ABCDE (Fig. 45.)

$=\frac{1}{2}bc \cdot sin(b,c) + \frac{1}{2}bd \cdot sin(b,d) + \frac{1}{2}be \cdot sin(b,e)$
$+ \frac{1}{2}cd \cdot sin(c,d) + \frac{1}{2}ce \cdot sin(c,e) + \frac{1}{2}de \cdot sin(d,e)$;

3) ein ähnliches Resultat im Vieleck überhaupt.

Anmerkung 1. Der Satz I. ist in so sehr vielen Fällen mit so vorzüglichem Erfolge zu gebrauchen und erspart, zweckmäßig angewandt, meist eine längere Reihe mühsamer Rechnungen, daß wir denselben hier noch in seiner ganzen Allgemeinheit hinstellen wollen.

Ist nämlich ABCDEA (Fig. 45.) ein beliebiges Vieleck, und läßt man einen Punkt, von A an, stetig den ganzen Umfang beschreiben, so mag die Richtung, in welcher, auf jeder Seite, dieser Punkt seinen Weg durchläuft, die Richtung dieser Seite heißen. Das Produkt aus jeder Seite mit dem Kosinus des (spitzen, rechten oder stumpfen) Winkels multiplicirt, den die Richtung dieser Seite mit irgend einer beliebigen Richtung OX in derselben Ebene (also nicht mit der entgegengesetzten Richtung XO) macht (und welches Produkt bald positiv, bald Null, bald negativ sein wird, je nachdem der gedachte Winkel ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer ist), mag die Projektion dieser Seite auf die Richtung OX genannt werden. — Der Satz I. kann dann allgemeiner so ausgedrückt werden, nämlich:

„Die Summe der Projektionen sämmtlicher Seiten, auf eine „und dieselbe beliebige Richtung OX, ist allemal der Null „gleich."

Derselbe Satz gilt auch noch, wenn die Ecken eines Vielecks nicht alle in einer und derselben Ebene liegen sollten, sondern beliebig im Raume liegen, und gleichzeitig die Richtung OX, auf welche projicirt wird, beliebig im Raume liegend gedacht wird, — sobald man nur unter dem Winkel, den die Richtung einer jeden Seite mit der Richtung OX macht, den Winkel versteht, den die Richtung dieser Seite mit der Richtung OX.

machen wird, wenn man sie parallel mit sich, nach irgend einem Punkte O der Richtung OX, fortgerückt denkt.

Dadurch, daß man die Richtung OX immer anders und anders annimmt, giebt dieser Satz beliebig viele Gleichungen, die man hier unmittelbar erhält, während man sie außerdem aus anderen Gleichungen erst durch mühsame Rechnungen ableiten müßte.

Will man, daß eine bestimmte Seite in der zu erzielenden Gleichung gar nicht vorkommt, so darf man die Richtung OX nur so gelegt denken, daß sie auf dieser Seite senkrecht steht, weil dann die Projektion dieser Seite auf OX, der Null gleich wird.

Will man, daß eine bestimmte Seite, z. B. a, in der zu erzielenden Gleichung mit nichts weiter multiplicirt erscheint, so darf man nur die Richtung OX mit dieser Seite a parallel legen, oder auch ganz mit a zusammenfallen lassen, weil dann der Winkel, welchen die Richtung der Seite a, mit der Richtung OX macht, entweder $=0$, oder $=180^\circ$ ist, so daß der Kosinus dieses Winkels entweder $=+1$, oder $=-1$ ist, die „Projektion" von a also entweder $=+a$, oder $=-a$ wird. — Geschieht dies, so geht eben unser jetzige allgemeinere Satz in den Satz I. des §. 196ᵃ. über.

Ueberall (in den Anwendungen) kann man sich aber leicht geschlossene Figuren (Vielecke) bilden, deren Ecken alle in einer und derselben Ebene liegen, oder nicht. — Ferner kann man jede Seite dieses Vielecks statt der Richtung OX nehmen, wenn man nicht absichtlich noch andere vorhandene gerade Linien statt der Richtung OX nehmen will; also erhält man mittelst dieses eben so einfachen als allgemeinen Satzes in jeder Anwendung augenblicklich eine größere und beliebig große Anzahl von Gleichungen, welche in der Regel dem gewünschten Zwecke unmittelbar entsprechen.

Der Beweis des Satzes ist für eine ebene Figur sehr leicht zu führen. Da, der Voraussetzung zu Folge, die Figur eine geschlossene ist, so liegen zwischen je zwei unendlichen geraden Linien, welche auf OX senkrecht gedacht werden, 2 (oder 4, oder

6, etc.) Stücken des Umfangs, von denen das eine z. B. die Richtung von der Linken zur Rechten, das andere dann die Richtung von der Rechten zur Linken zurück hat. Die Projektion eines jeden dieser beiden Stücke, ist der senkrechte Abstand der beiden, auf OX senkrecht gedachten Geraden, (der auf OX genommen werden kann), — die eine aber positiv, die andere negativ, so daß die Summe dieser beiden Projektionen für sich $=0$ ist. Denkt man sich nun solche, auf OX senkrechte Geraden, auch durch alle Ecken der Figur gelegt, so folgt von selbst, daß auch die Summe der Projektionen aller Seiten der Figur, wiederum der Null gleich sein muß, wenn auch einzelne der Seiten, durch die auf OX senkrecht gedachten Geraden in Stücken zertheilt worden sind.

Und ist die geschlossene Figur keine ebene, so muß man statt der Geraden, jetzt Ebenen auf OX senkrecht sich denken, durch alle Ecken der Figur; dann ist wiederum die Summe der Projektionen der zwischen je zwei dieser Ebenen liegenden Stücke des Umfangs, für sich offenbar der Null gleich; also auch die Summe aller Projektionen (d. h. der Projektionen aller Seiten der Figur) eben so offenbar der Null gleich.

Anmerkung 2. Man sieht in dem Vorhergehenden nicht bloß die einfachsten und wichtigsten Aufgaben der ebenen Trigonometrie gelöst, sondern zugleich auch mehrere der wichtigsten Eigenschaften der Sinus und Kosinus für sich entwickelt, ohne dabei eine Anwendung auf Dreiecke im Auge zu haben. Wir theilen daher hier nur noch diejenigen speziellen Eigenschaften mit, welche für die vorstehenden Rechnungen nützlich oder nothwendig sind; nämlich:

1) Die Sinus und Kosinus aller spitzen Winkel sind ächte Brüche, also <1. Die Logarithmen derselben sind daher lauter negative Zahlen, und sind deshalb in den logarithmischen Sinus-Tafeln alle um 10 Ganze zu groß aufgeführt, um nicht mit negativen Zahlen rechnen zu müssen.

2) Das letztere gilt auch von den Tangenten und Kotangenten, welche zwar nur zur Hälfte kleiner als 1, zur andern Hälfte aber größer als 1 sind. In den Tafeln sind ihre Logarithmen alle um 10 Ganze zu groß aufgeführt.

3) Werden daher im Verlaufe der Rechnung zwei, drei, oder vier solche Logarithmen zu einander addirt, so ist die Summe bezüglich um 20, 30 oder 40 zu groß. Wird diese Summe nachher wieder, z. B. durch 2 dividirt, so ist das Resultat bezüglich um 10, 15, 20 zu groß. Wird aber dieselbe Summe z. B. durch 3 dividirt, so ist solche bezüglich um $6\frac{2}{3}$, 10, $13\frac{1}{3}$ zu groß.

4) Dies letztere, daß nämlich Logarithmen um $6\frac{2}{3}$ oder $13\frac{1}{3}$ oder 15 zu groß sind, würde Unbequemlichkeiten verursachen. Deshalb sorgt man dafür, daß alle Endresultate um 10 zu groß sind, oder, wenn sie dann doch noch negativ werden sollten, um 20, 30. — Soll also z. B. ein solches Logarithmen-Resultat, welches bereits um 20 zu groß ist, durch 3 dividirt werden, so addirt man vorher noch 10 Ganze dazu, damit es um 30 zu groß werde, und dividirt dann erst durch 3, damit das Endresultat gerade um 10 zu groß ist. — Soll ein andermal ein Logarithmen-Resultat, welches um 10 zu groß ist, durch 3 dividirt werden, so addirt man vorher 20 Ganze dazu, damit es um 30 zu groß werde, und dividirt nun erst durch 3; dann wird das Endresultat gerade wieder um 10 zu groß sein. So in allen analogen Fällen auf analoge Weise.

5) Während die spitzen Winkel zwischen 0 und 90° wachsen, wachsen die Sinus und die Tangenten mit; dagegen werden zu gleicher Zeit die Kosinus und die Kotangenten abnehmen. — Wird daher ein Winkel um mehrere (Winkel-) Sekunden größer, und weiß man, wie viel *log sin*, *log cos*, *log tg* und *log cotg* dieses Winkels für jede Sekunde, also für alle diese Sekunden sich ändern, so muß man diese Aenderung addiren, wenn man *log sin* oder *log tg* für den neuen (größern) Winkel finden will, dagegen subtrahiren, wenn *log cos* oder *log cotg* des neuen (größeren) Winkels gefunden werden soll.

Diese Aenderung für jede Sekunde steht aber in vielen Tafeln in einer eigenen Kolumne schon ausgerechnet. Man muß sie mit der Anzahl der Sekunden multipliciren, um die Aenderung für alle Mehr-Sekunden zu haben.

6) Umgekehrt soll zu einem *log sin* α, *log cos* α, *log tg* α oder *log cotg* α in der Tabelle der Winkel α selbst gefunden werden, und findet man diesen Logarithmen nicht genau in der Tabelle, sondern nimmt man den nächst kleinsten (der um δ von dem gegebenen verschieden ist), so ist der nebenstehende Winkel in der Tabelle $< \alpha$, wenn *log sin* α, oder *log tg* α gesucht worden ist, dagegen $> \alpha$, wenn *log cos* α, oder *log cotg* α aufgeschlagen werden sollte. Weiß man dann, daß zu dem obigen Unterschiede δ der Logarithmen, ein Unterschied von d Sekunden im Winkel gehört*), so muß diese Anzahl d der Sekunden zu dem in der Tabelle gefundenen Winkel addirt werden, wenn man *log sin* α, oder *log tg* α, — dagegen subtrahirt werden, wenn man *log cos* α, oder *log cotg* α aufgeschlagen und den nächst kleinern genommen hatte.

7) In so fern die Tabellen bloß spitze Winkel enthalten und besonders auch weil die Kosinusse, Tangenten und Kotangenten der stumpfen Winkel negative Zahlen sind, die nie reelle Logarithmen haben, so muß man in den Anwendungen die Formeln, welche berechnet werden sollen, vorher jedesmal dergestalt umformen, daß nur Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten spitzer Winkel erscheinen, was nach den Formeln §. 183. Nr. Nr. 3. 4. und §. 185. Nr. Nr. 6. 7., nach welchen

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha); \quad \cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha);$$
$$tg\,\alpha = -tg(180^\circ - \alpha) \text{ und } cotg\,\alpha = -cotg(180^\circ - \alpha)$$

ist, allemal sehr leicht geschieht.

8) Erscheinen während der Rechnung sogenannte negative Winkel**), d. h. *sin* (—x), *cos* (—x), *tg* (—x) oder *cotg* (—x),

*) Man findet diese Zahl d, wenn man den Unterschied δ durch den Unterschied, der auf eine Sekunde kommt, dividirt.

**) Daß es negative Winkel nicht giebt, versteht sich von selbst, da überhaupt negative Größen nicht existiren. — Eine Aufgabe der

so wendet man die Formeln §. 184. Nr. Nr. 1. 2. und §. 185. Nr. Nr. 5. 6., d. h. die Formeln

$$sin\,(-x) = -sin\,x; \qquad cos\,(-x) = +cos\,x;$$

$$tg\,(-x) = -tg\,x \text{ und } cotg\,(-x) = -cotg\,x$$

an, und man kann die Rechnungen in Ziffern sogleich fortsetzen.

---

ebenen Trigonometrie wird wie jede andere algebraische Aufgabe zuerst angesetzt, und diese (Ansatz-) Gleichungen enthalten dann nur die Sinus und Kosinus, Tangenten und Kotangenten spitzer oder höchstens stumpfer Winkel α, für welche Winkel man die zugehörigen Bogen x (im Kreise, dessen Radius 1 ist) setzen kann, so daß dann unter *sin* x, *cos* x jene Potenz-Ausdrücke oder jene unendlichen Reihen (§. 178. und 179. I. II.) verstanden werden, also Buchstaben-Ausdrücke, die als solche schon ihre Bedeutung haben, unabhängig von jeder speziellern Bedeutung, die sie für verschiedene positive oder negative, reelle oder imaginäre Werthe von x, haben. Mit diesen Buchstaben-Ausdrücken wird nun nach den Formeln des IX. Kapitels gerechnet; „die Auflösung obiger Ansatz-Gleichungen wird durch eine solche Rechnung bewirkt, und diese Rechnung kann nun *sin* (y—z), *cos* (y—z), u. s. w. einführen, während y—z eben so gut positiv als auch negativ sein kann. So entstehen also die Ausdrücke *sin* (—x), *cos* (—x), etc. etc., in denen man —x zuweilen einen negativen Winkel nennen hört, wenn auch diese Art sich auszudrücken der Natur der Sache ganz unangemessen ist.

Körperliche Geometrie

oder

Stereometrie.

Der körperlichen Geometrie

Erstes Kapitel.

Von der Lage der Linien und der Ebenen gegen einander.

§. 197. Durch 3 Punkte, durch 2 sich schneidende gerade Linien, durch eine Gerade und einen Punkt außer ihr, endlich durch 2 parallele Linien*) ist jedesmal eine Ebene völlig bestimmt und gegeben. — Jede Ebene ist ohne Ende. — Vier Punkte dagegen und zwei beliebige gerade Linien liegen nicht nothwendig in einer und derselben Ebene.

§. 198. Zwei Ebenen haben entweder, obgleich jede ohne Ende fortgeht, gar keinen Punkt, oder eine unendliche Gerade mit einander gemein. Im erstern Fall sagt man, „sie laufen mit einander parallel"; im letztern Fall heißt es, „sie schneiden sich in dieser Geraden", d. h. sie haben außer dieser unendlichen Geraden keinen Punkt weiter mit einander gemein. Diese Ebenen begrenzen den Raum, von der Durchschnitts-Linie an gerechnet, ohne Ende fort, theilen ihn in zwei Theile,

---

*) Dies liegt in der Definition der parallelen Linien, weil man darunter nur solche gerade Linien versteht, die sich bereits in einer und derselben Ebene befinden und dabei sich nie schneiden. — Zwei Gerade im Raume, die sich nie schneiden, obgleich sie beide ohne Ende fortgehen, sind deshalb noch nicht parallele Linien.

deren jeder ohne Ende fort und deshalb völlig begrenzt ist, und bilden daher zwei der einfachsten körperlichen Raum-Figuren, die wir Flächen-Winkel nennen. Die Ebenen heißen die Schenkel, die Durchschnitts-Linie heißt die Scheitel-Linie des Flächen-Winkels.

Ein solcher Flächen-Winkel läßt sich als eine (endliche) benannte Zahl herstellen; darum ist er eine Größe. Gleiche, größere, kleinere Flächen-Winkel kann man daher (nach §. 112.) leicht erkennen. — Gleiche Flächen-Winkel sind immer auch kongruent.

Sind beide, von zweien sich schneidenden Ebenen gebildete Flächen-Winkel einander gleich, so heißt jeder ein gestreckter. Jeder der Schenkel ist dann die Verlängerung des andern. — Sind dieselben beiden Flächen-Winkel einander ungleich, so heißt der kleinere ein hohler, der größere ein erhabener. Ist ein Flächen-Winkel die Hälfte vom gestreckten, so heißt er ein rechter, und man sagt dann, die beiden Ebenen stehen auf „einander senkrecht."

Außerdem giebt es noch Neben-Flächen-Winkel (deren Summe zweien rechten gleich ist), und Scheitel-Flächen-Winkel (die allemal einander gleich sind); alles ganz analog dem, was im 1sten Kapitel der ebenen Geometrie von den (Linien-) Winkeln gesagt werden konnte.

§. 199. Schneiden sich 3 Ebenen A, B, C wechselseitig in dreien Durchschnitts-Linien (A, B), (A, C), (B, C), so sind nur zwei Fälle denkbar, nämlich entweder

I. diese 3 Durchschnitts-Linien fallen alle drei in eine einzige zusammen, und dann gehen 3 Ebenen durch dieselbe Gerade und bilden 3 Flächen-Winkel, von denen der eine die Summe der beiden andern ist; oder

II. die 3 Durchschnitts-Linien sind alle drei von einander verschieden. In diesem letztern Fall finden aber wieder nur zwei Unterfälle statt, nämlich entweder

1) die 3 Durchschnitts-Linien laufen alle drei in einem und demselben Punkte zusammen; dann nennt man die Figur ein

körperliches Dreieck, welches 3 Seiten (Linien-Winkel) und 3 Winkel (Flächen-Winkel) hat; oder

2) die 3 Durchschnitts-Linien laufen alle drei paarweise mit einander parallel, und die Figur heißt dann ein dreiseitiger prismatischer Raum.

§. 200. Daraus folgt sogleich: Sind zwei Gerade p und q mit einer dritten Geraden r im Raume parallel, so sind auch p und q unter sich parallel.

Denn man kann jedenfalls durch p und durch einen Punkt α von q eine Ebene legen, welche die Ebene (q, r) in einer Geraden x schneiden mag; dann schneiden sich die 3 Ebenen (p, r) und (q, r) und (p, x) in den 3 Durchschnitts-Linien p, r und x, so daß alle drei mit einander parallel laufen; also fällt x mit q zusammen, weil beide in derselben Ebene (r, α) liegen, beide durch denselben Punkt α hindurch gehen, und beide mit r parallel laufen.

§. 201. Denkt man sich von einem Punkte aus mehr als 3 gerade Linien auslaufend und solche paarweise in ihrer Aufeinanderfolge durch Ebenen verbunden, so entstehen die körperlichen Vierecke, Fünfecke, Vielecke, welche durch Diagonal-Ebenen in körperliche Dreiecke zerlegt werden.

Denkt man sich aber mehr als 3 Gerade paarweise mit einander parallel, und paarweise in ihrer Aufeinanderfolge durch Ebenen verbunden, so entstehen die 4-, 5-, viel-seitigen prismatischen Räume, welche durch Diagonal-Ebenen in lauter dreiseitige prismatische Räume zerlegt werden.

§. 202. Die körperlichen Dreiecke oder Vielecke und die prismatischen Räume gehen ohne Ende fort, erstere von der Spitze aus, letztere auf zweien Seiten. Werden erstere durch Ebenen geschlossen, so entstehen Körper, die man Pyramiden nennt, oder abgekürzte Pyramiden, je nachdem nur eine oder zwei Ebenen noch hinzukommen, welche die Seiten des körperlichen Dreiecks oder Vielecks schneiden. — Werden aber die prismatischen Räume durch zwei Ebenen, welche deren Grenz-Flächen schneiden, geschlossen, so entstehen abgekürzte Prismen oder gemeine Prismen, je nachdem die beiden schließenden Ebenen beliebig liegen oder mit einander parallel sind.

§. 203. Denkt man sich eine Gerade um einen Punkt herum beliebig bewegt, so entsteht eine allgemeine konische Fläche, wenn sie nicht eine ebene Fläche ist; bewegt sich aber eine Gerade parallel mit sich, so nennt man die beschriebene Fläche eine allgemeine Cylinder=Fläche, wenn sie nicht eine ebene ist. Schließt eine konische Fläche oder eine Cylinder=Fläche ringsum einen Raum ein, und wird dieser durch eine oder durch zwei Ebenen geschlossen, so entsteht ein allgemeiner Kegel, vollständig oder abgekürzt, und ein allgemeiner Cylinder, ein voller oder ein abgekürzter, je nachdem in dem Fall des Cylinders die beiden schließenden Ebenen unter sich parallel laufen oder nicht. — Wir betrachten hier vorzüglich solche Kegel und Cylinder, welche durch Kreisflächen geschlossen sind, und welche man gemeine nennt.

§. 204. Außer diesen einfachsten Körpern, in welche alle übrigen zerlegt werden können, betrachten wir noch die Kugel, welche durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entsteht, einen Mittelpunkt, lauter gleiche Radien oder Halbmesser, lauter gleiche Diameter oder Durchmesser hat, und von einer krummen Fläche begrenzt ist, deren Punkte alle von ihrem Mittelpunkte gleich weit abliegen.

§. 205. So wie man im Kreise reguläre Vielecke sich denken kann, so kann man auch in der Kugel reguläre Körper sich denken, deren Oberflächen aus lauter kongruenten und unter gleichen (Flächen-) Winkeln zusammenhängenden ebenen Figuren zusammengesetzt sind. Es giebt jedoch solcher nur 5, nämlich 1) das Tetraeder (reguläre dreiseitige Pyramide); 2) das Hexaeder (reguläres vierseitiges Prisma, auch Kubus oder Würfel genannt); 3) das Octaeder (von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, und welches sich in zwei vierseitige Pyramiden zerlegen läßt); 4) das Dodekaeder (von 12 regulären Fünfecken begrenzt; endlich 5) das Icosaeder (von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt).

Jeder dieser regulären Körper hat einen Mittelpunkt, und kann aus solchem, durch Gerade, die nach seinen (in einer Kugel=

Oberfläche liegenden) Ecken gedacht werden, in eben so viele kongruente Pyramiden zerlegt werden, als seine Oberfläche kongruente Theile hat.

Außer diesen 5 regulären Körpern kann man sich auch noch eine Anzahl halb regulärer Körper denken, deren Ecken auch alle in einer Kugel-Fläche liegen, die also auch einen Mittelpunkt haben, deren Oberflächen aber aus 2 verschiedenen regulären Figuren, jedoch auf eine reguläre Weise zusammengesetzt sind.

§. 206. Betrachten wir nun nach dieser Uebersicht der möglichen einfachen Körper, die Lage der geraden Linien und Ebenen gegen einander.

1) Eine Gerade kann einer Ebene nur in einem einzigen Punkte begegnen, wenn sie nicht ganz in letzterer liegt.

2) Eine Gerade a trifft eine Ebene E nie, obgleich beide ohne Ende fortlaufen, sobald sie mit einer Linie b in der Ebene E parallel läuft.

Denn die Linie a kann aus der Ebene (a, b) nicht heraus, könnte also mit der Ebene E nur den Punkt gemein haben, der in E und (a, b) zugleich liegt, der also auch in der Durchschnitts-Linie b dieser beiden Ebenen liegen müßte, was nicht möglich ist, so lange a mit b parallel läuft.

3) Trifft eine Gerade a eine Ebene E in einem Punkte α, so macht sie mit jeder in E durch α gezogenen Geraden p, q, r, s, etc. etc. Winkel, welche an Größe verschieden sein können. Sind aber zwei dieser Winkel, z. B. (a, p) und (a, q) rechte, ohne daß q die Verlängerung von p ist, so sind die übrigen dieser Winkel (a, r) (a, s) etc. etc. auch rechte Winkel, und man sagt dann, „die Gerade a stehe auf der Ebene E senkrecht." — Außerdem sagt man, „die Gerade a stehe schief auf der Ebene E."

Man wählt zum Beweise eine beliebige dritte Linie r (Fig. 38.), verlängert p, q und r, macht von α aus auf jeder Seite, so viel es angeht, gleiche Stücke, und beweist durch die Kongruenz von 7 Paaren Dreiecke, daß a mit r zwei gleiche Nebenwinkel bildet, so daß jeder ein rechter Winkel sein muß.

4) Auf eine Ebene läßt sich von einem Punkt in oder außer ihr, nur eine senkrechte Linie errichten.

5) Trifft eine Linie a in einem Punkte α, drei oder mehr andere Gerade p, q, r, etc. etc., so daß die Winkel (a, p) (a, q) (a, r), etc. etc. lauter rechte Winkel sind, so liegen p, q, r, etc. etc. alle in einer und derselben Ebene.

Man denkt sich die Ebene (p, q) und die Ebene (a, r), die sich in einer Geraden x schneiden. Nach der Nr. 3. ist dann (a, x) ein rechter Winkel, so wie der Voraussetzung zufolge auch (a, r), während a, x und r in einer und derselben Ebene liegen; also fällt x mit r zusammen.

6) Stehen zwei Gerade a und b, auf einer Ebene E senkrecht, so sind sie unter sich parallel (Fig. 39.).

Man muß zuerst beweisen, daß sie in einer und derselben Ebene liegen, was dadurch geschieht, daß man den Fußpunkt der einen mit dem Fußpunkt und mit noch einem zweiten Punkte der andern durch Gerade verbindet, und nun eine Linie m in der Ebene E nachweist, welche auf allen diesen Geraden zugleich senkrecht steht.

7) Sind zwei Gerade a und b unter sich parallel, und steht die eine davon auf einer Ebene E senkrecht, so steht auch die andere auf derselben Ebene E senkrecht.

Man nimmt zum Beweis dieses Satzes die in Nr. 6. beschriebene Figur (39.) und kehrt die letzten Schlüsse bloß um.

8) Steht eine Gerade auf zweien Ebenen zugleich senkrecht, so sind letztere unter sich parallel. (Wird indirekt bewiesen.)

9) Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern Seite senkrecht. (Wird bewiesen, indem man zwei Ebenen durch die Gerade legt, welche dann jede der parallelen Ebenen in zwei Geraden schneidet.)

10) Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten Ebene in parallelen Linien geschnitten. (Wird indirekt erwiesen.)

11) Sind zwei Ebenen mit einander parallel, so stehen sie allenthalben gleich weit von einander ab. — Und ist eine gerade Linie mit einer Ebene parallel, so stehen ihre Punkte ebenfalls gleich weit von der Ebene ab.

Denn die Abstände bilden Parallelogramme.

12) Sind zwei sich schneidende Linien a und b mit zwei andern sich schneidenden Linien A und B bezüglich parallel, so ist auch die Ebene (a, b) mit der Ebene (A, B) parallel, und auch der Winkel (a, b) dem Winkel (A, B) gleich (Fig. 40.).

Man fällt zum Beweise des erstern Satzes von dem Durchschnitts-

Punkte der Geraden a und b auf die Ebene (A, B) eine Senkrechte s und sucht die Durchschnitte p und q der Ebenen (a, s) und (b, s) mit der (A, B). — Der andere Theil des Satzes wird dann mittelst kongruenter Dreiecke bewiesen.

§. 207. Schneiden sich zwei Ebenen in einer Geraden d (Fig. 41.), nimmt man in d einen beliebigen Punkt δ, und errichtet man von δ aus in jeder der beiden Ebenen eine Gerade, senkrecht auf d, so bilden diese beiden Geraden a und b eine Ebene und einen Winkel mit einander, welcher letztere der Neigungs-Winkel der beiden Ebenen genannt wird, auch „der dem Flächen-Winkel entsprechende Linien-Winkel." — Nach §. 206. Nr. 12. ist dieser Winkel immer gleich groß, wo man auch δ in p annehmen mag.

§. 208. Hieraus folgt:

1) Die Scheitel-Linie d eines Flächen-Winkels steht immer auf der Ebene (a, b) des Neigungs-Winkels senkrecht.

2) Sind die Flächen-Winkel einander kongruent, so sind auch ihre entsprechenden Linien-Winkel einander kongruent. — Und umgekehrt.

3) Zwei Flächen-Winkel verhalten sich wie ihre entsprechenden Linien-Winkel. — Werden daher die Flächen-Winkel durch den Flächen-Winkel-Grad gemessen, welcher als der 90ste Theil vom rechten Flächen-Winkel gedacht wird, so hat jeder Flächen-Winkel genau so viele Flächen-Winkel-Grade, als sein entsprechender Linien-Winkel, Linien-Winkel-Grade zählt. — Das Maaß des Flächen-Winkels ist also durch das Maaß des Neigungs-Winkels gegeben. Ist daher der Neigungs-Winkel ein rechter, so stehen die Ebenen auf einander senkrecht.

4) Der Neigungs-Winkel wird auch konstruirt, wenn man in der einen Ebene außerhalb der Durchschnitts-Linie d (Fig. 41.) einen Punkt α annimmt, von demselben aus, eine Gerade $\alpha\beta$ senkrecht auf die andere Ebene sich denkt, vom Fußpunkte β aus auf die Durchschnitts-Linie d, eine Senkrechte $\beta\gamma$ fällt, dann aber die Gerade $\alpha\gamma$ zieht. Der Winkel $\alpha\gamma\beta$ ist dann allemal der Neigungs-Winkel.

Man legt durch β eine Gerade $\beta\varepsilon$ mit d parallel und beweist, daß sie und daher auch die Scheitel-Linie d auf der Ebene $\alpha\gamma\beta$, daß letztere daher auch auf $\alpha\gamma$ senkrecht steht.

5) Errichtet man aus einem Punkt δ in der Durchschnitts-Linie d zweier Ebenen, auf jede Ebene eine Senkrechte, so bilden letztere zwei gerade Linien p und q, unter sich zwei Nebenwinkel, von denen der eine dem Neigungs-Winkel der Ebenen gleich ist (als Differenzen zwischen rechten Winkeln und einem gemeinschaftlichen Stücke), während der andere dieser Nebenwinkel mit dem gedachten Neigungs-Winkel zusammen 180° ausmacht.

6) Sind zwei Ebenen auf einander senkrecht, so steht jede Gerade, welche in der einen Ebene liegt, auf der andern Ebene senkrecht, sobald sie auf der Durchschnitts-Linie senkrecht steht (weil sie dann auf zweien Linien in der andern Ebene senkrecht steht).

7) Umgekehrt: Steht eine Linie a in der Ebene A, auf einer zweiten Ebene B senkrecht, so stehen auch die Ebenen auf einander senkrecht (weil ihr Neigungs-Winkel dann ein rechter ist).

8) Die Durchschnitts-Linie zweier auf einer Ebene E senkrechten Ebenen A und B, steht ebenfalls auf der Ebene E senkrecht. (Wird indirekt erwiesen.)

§. 209. Steht eine Linie $\alpha\beta$ (Fig. 42.), welche einer Ebene E in dem Punkte β begegnet, schief auf der Ebene E, so kann man von α aus eine Senkrechte $\alpha\gamma$ auf die Ebene E herunter fällen. Die Linie $\alpha\beta$ macht dann mit allen den Geraden, welche von β aus, außer der $\beta\gamma$ noch gezogen werden, und welche alle durch $\beta\delta$ vorgestellt sein mögen, Winkel, die immer größer werden, je größer der Winkel $\delta\beta\gamma$ wird; und diese Winkel sind spitze, rechte oder stumpfe, je nachdem der Winkel $\delta\beta\gamma$ spitz, recht oder stumpf ist. — Das gilt auf jeder Seite von $\beta\gamma$. — Denkt man sich aber zwei solche Linien $\beta\delta$ und $\beta\delta'$, welche auf beiden Seiten der $\beta\gamma$ liegen, und so, daß sie mit $\beta\gamma$ gleiche Winkel bilden, so sind auch die Winkel $\alpha\beta\delta$ und $\alpha\beta\delta'$ einander gleich. —

Der kleinste aller dieser Winkel $\alpha\beta\delta$, nämlich der Winkel $\alpha\beta\gamma$, heißt der Neigungs-Winkel der geraden Linie $\alpha\beta$ gegen die Ebene E.

Die Ebene $\alpha\beta\gamma$ steht auf der Ebene E senkrecht; die Ebene $\alpha\beta\delta$ macht aber mit der Ebene E immer kleinere (Flächen-) Winkel, je größer der Winkel $\gamma\beta\delta$ wird, wenn er nur noch spitz ist. Wird endlich der Winkel $\gamma\beta\delta$ ein rechter, so macht die Ebene $\alpha\beta\delta$ mit E den kleinsten (und wenn man die Nebenwinkel nimmt, den größten) (Flächen-) Winkel. Wächst der Winkel $\gamma\beta\delta$ noch mehr, so daß er stumpf wird, so ist sein Nebenwinkel wiederum spitz, und die Ebene $\alpha\beta\delta$ richtet sich dann auf der andern Seite von $\beta\gamma$, nach und nach immer mehr wieder auf, bis endlich der Winkel $\gamma\beta\delta$ der gestreckte wird (zwei rechte), wo dann die Ebene $\alpha\beta\delta$ in ihre alte Lage $\alpha\beta\gamma$ zurückgekehrt ist und wiederum auf der Ebene E senkrecht steht.

In Bezug auf den erstern Theil dieses §. muß man zwei Lagen sich denken, und die Dreiecke vergleichen, welche entstehen, wenn man von den Schenkeln der Winkel gleich lange Stücke abschneidet. In Bezug auf den andern Theil der Behauptung aber muß man die den Flächen-Winkeln entsprechenden Neigungs-Winkel (nach §. 208. Nr. 4.) konstruiren, dann die auf ähnliche Weise entstehenden Dreiecke mit einander vergleichen.

§. 210. Zwei parallele Linien bilden mit einer und derselben Ebene gleiche Neigungs-Winkel, weil letztere in parallelen Ebenen von parallelen Schenkeln gebildet werden.

Der körperlichen Geometrie

Zweites Kapitel.

Von den körperlichen Dreiecken, von den Pyramiden, Prismen, Cylindern, Kegeln und Kugeln.

§. 211. Von einem körperlichen Dreieck kann man sich folgende Eigenschaften bemerken:

1) Denkt man sich in einem solchen die 3 Kanten desselben jenseit seiner Spitze verlängert, so entsteht ein Scheitel-

Dreieck, welches in derselben Ordnung dieselben Seiten und dieselben Winkel hat, wie das gegebene, ohne daß beide kongruent wären, weil die gleichen Stücke, wenn man eins derselben zusammenfallen läßt, in verschiedenen Richtungen rings herum auf einander folgen. Stülpte man eins derselben um, so wären beide kongruent. Wir sagen daher, sie seien umgestülpt kongruent.

2) Errichtet man aus der Spitze o eines körperlichen Dreiecks drei Senkrechte auf die Seiten des körperlichen Dreiecks, und nimmt man von o aus die Richtungen dieser Senkrechten nach außen, in Bezug auf den durch die 3 Seiten des körperlichen Dreiecks begrenzten Raum, so hat man ein neues körperliches Dreieck, welches das Ergänzungs-Dreieck genannt wird und von welchem das erst gegebene wiederum das Ergänzungs-Dreieck ist.

In zwei solchen Ergänzungs-Dreiecken ist die Summe einer jeden Seite des einen und des entsprechenden Winkels in dem andern, allemal = 180° (nach §. 208. Nr. 5.).

3) In einem und demselben körperlichen Dreieck stehen a) gleichen Seiten auch gleiche Winkel, und b) auch gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber. Ferner steht c) der größern Seite auch immer der größere Winkel, und d) dem größern Winkel auch wieder die größere Seite gegenüber. Endlich ist e) die Summe zweier Seiten allemal größer als die dritte.

Diese Sätze beweisen sich zum Theil durch Konstruktion der Neigungs-Winkel und Vergleichung der entstehenden ebenen Dreiecke, theils indirekt.

4) Zwei körperliche Dreiecke sind kongruent:

a) wenn alle drei Seiten,

b) wenn alle drei Winkel,

c) wenn zwei Seiten und der zwischen liegende Winkel,

d) wenn zwei Winkel und die zwischen liegende Seite,

e) wenn zwei Seiten und ein Gegenwinkel, und

f) wenn zwei Winkel und eine Gegenseite

bezüglich einander gleich sind, wenn nur in allen 6 Fällen die gleichen Stücke in derselben Ordnung nach derselben Richtung zu auf einander folgen, und wenn noch in Nr. 5. die Summe der andern Gegenwinkel, und in Nr. 6. die Summe der andern Gegenseiten nicht genau zwei rechte Winkel beträgt.

Sollten die übrigen Bedingungen erfüllt sein, die gleichen Stücke aber rings herum in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen, so wären die Dreiecke doch „umgestülpt kongruent."

Die Beweise können mit geringer Abänderung eben so geführt werden, wie die der Kongruenz ebener Dreiecke.

§. 212. Von den prismatischen Räumen ist zu merken:

1) Schneiden zwei parallele Ebenen die Seiten eines beliebigen 3- oder mehrseitigen prismatischen Raumes, so sind die Durchschnitts-Figuren von parallelen und deshalb auch von gleichen Seiten und Winkeln gebildet, daher kongruent. Der Körper heißt ein (gemeines) Prisma; die Durchschnitts-Figuren werden seine Grundflächen, ihr senkrechter Abstand von einander wird seine Höhe genannt. — Die Seitenflächen eines jeden gemeinen Prisma sind Parallelogramme; die eines abgekürzten Prisma dagegen sind (Parallel-) Trapeze. Das gemeine Prisma heißt senkrecht oder schief, je nachdem eine der Seiten-Kanten desselben (und demnach jede) senkrecht oder schief auf den Grundflächen steht.

2) Das gemeine Prisma heißt ein Parallelepipedum, wenn die Grundflächen Parallelogramme, — ein rechtwinkliges Parallelepipedum, wenn sie Rechtecke sind und noch die Seiten-Kanten auf den Grundflächen senkrecht stehen; — das Letztere heißt ein Würfel oder Kubus, wenn die Grundflächen und die Seiten-Flächen Quadrate sind.

3) Zwei Prismen sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben; daher ist auch jedes Prisma einem rechtwinkligen Parallelepipedum gleich, welches mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

4) Ein rechtwinkliges Parallelepipedum hängt allein von seinen 3, in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c ab,

von denen je zwei ein Rechteck bilden, welches als die Grundfläche des Prisma angesehen werden kann, während die dritte Kante dann allemal die zugehörige Höhe ist; d. h. zwei rechtwinklige Parallelepipeda mit denselben Kanten sind einander kongruent.

5) Zwei rechtwinklige Parallelepipeda verhalten sich, wenn sie eine gleiche Kante haben, wie die Produkte aus den beiden andern Kanten (also, wenn sie gleiche Höhe haben, wie die Grundflächen).

6) Haben sie aber zwei Paare gleicher Kanten (also gleiche Grundflächen), so verhalten sie sich wie die dritten Kanten (wie die Höhen).

7) Im Allgemeinen verhalten sich zwei rechtwinklige Parallelepipeda wie die Produkte ihrer 3 Kanten (also wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe).

8) Der Inhalt eines jeden Prisma wird gefunden, wenn man seine Grundfläche mit seiner Höhe multiplicirt, d. h. mißt man die Höhe mit irgend einer Längen-Einheit, die Grundfläche mit dem Quadrat dieser Längen-Einheit, den Körper aber mit dem Kubus oder Würfel aus dieser Längen-Einheit (Kubik-Zoll, Kubik-Fuß, ꝛc. ꝛc. genannt), so ist das Produkt der beiden ersten Maaße (unbenannten Zahlen), dem letztern Maaße allemal genau gleich.

§. 213. 1) Legt man durch ein körperliches Dreieck oder Vieleck zwei Ebenen, welche die Seiten-Flächen schneiden und mit ihnen zwei Durchschnitts-Figuren bilden, so entstehen zwei Pyramiden, welche die Spitze des körperlichen Dreiecks zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und von welchen die eine ein Theil ist der andern. Die Durchschnitts-Figuren werden die Grundflächen dieser Pyramiden genannt; der (senkrechte) Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide. Beide Pyramiden heißen ähnliche, wenn diese Grundflächen beide mit einander parallel laufen.

Der zwischen den beiden Grundflächen dieser Pyramide liegende Körper heißt eine abgekürzte Pyramide, und zwar eine parallel oder schief abgekürzte, je nachdem die beiden

Durchschnitts-Figuren, welche ebenfalls ihre Grundflächen genannt werden, mit einander parallel laufen oder nicht. Im erstern Fall spricht man auch von der Höhe der abgekürzten Pyramide, und versteht darunter den senkrechten Abstand ihrer parallelen Grundflächen.

Sind die Durchschnitts-Figuren (d. h. die beiden Grundflächen) mit einander parallel, so sind sie auch ähnlich (die Seiten-Dreiecke sind ähnlich, daher die proportionirten Seiten; die Winkel in den Grundflächen sind ohnedies gleich, weil sie von parallelen Schenkeln gebildet werden). — Die Inhalte dieser Grundflächen verhalten sich dann zu einander, wie die Quadrate der Seiten-Kanten, und daher auch wie die Quadrate der Höhen der beiden vollen Pyramiden (bis zur Spitze gerechnet).

2) Zwei Pyramiden sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben (weil sie in gleichen Entfernungen von der Spitze immer gleiche, mit der Grundfläche parallele Querschnitte haben).

3) Ein dreiseitiges Prisma kann immer durch zwei Schnitte, welche von einer Kante einer jeden der Grundflächen nach der gegenüber liegenden Ecke der andern Grundfläche gehen, in 3 Pyramiden zerlegt werden, von denen zwei die Grundfläche und die Höhe des Prisma haben, während die dritte jeder der beiden andern gleich ist.

4) Daher ist eine Pyramide der dritte Theil von jedem Prisma, welches mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

5) Also wird der Inhalt einer jeden Pyramide gefunden, wenn man ihre Grundfläche mit ihrer Höhe multiplicirt und davon den dritten Theil nimmt.

6) Soll aber der Inhalt einer abgekürzten Pyramide gefunden werden, so muß man von dem Inhalte der ganzen Pyramide, den Inhalt der kleinern (abgeschnittenen) subtrahiren.

Sind jedoch die beiden Grundflächen G und g mit einander parallel, und ist die Höhe der abgekürzten Pyramide $= a$, so lassen sich die Höhen H und h der ganzen und der kleinern

abgeschnittenen Pyramide berechnen. Es ist nämlich (nach Nr. 1.)

$$G:g=H^2:h^2 \quad \text{und} \quad H=h+a:$$

und aus diesen beiden Gleichungen finden sich die beiden Unbekannten H und h so:

$$H=a\cdot\frac{G+\sqrt{Gg}}{G-g} \quad \text{und} \quad h=a\cdot\frac{g+\sqrt{Gg}}{G-g};\text{*)}$$

und daraus folgt nun der Inhalt der abgekürzten Pyramide

$$=\tfrac{1}{3}a\cdot(G+g+\sqrt{Gg}).$$

§. 214. 1) Einen gemeinen Cylinder kann man sich als ein gemeines Prisma denken, dessen Grundfläche ein reguläres Unendlich-Vieleck, nämlich ein Kreis ist.

2) Daher wird der Inhalt eines solchen Cylinders gefunden, wenn man die Grundfläche (die eine Kreisfläche ist) mit der Höhe multiplicirt. — Ist daher r der Radius der Grundfläche und h die Höhe, so ist der Inhalt $=h\cdot r^2\cdot\pi$.

3) Die Gerade, welche die beiden Mittelpunkte der kongruenten parallelen Kreis-Grundflächen eines gemeinen Cylinders mit einander verbindet, heißt dessen Axe, und je nachdem diese senkrecht oder schief auf den Grundflächen steht, wird der Cylinder ein senkrechter oder ein schiefer genannt.

4) Im senkrechten Cylinder ist der Cylinder-Mantel (d. h. die Oberfläche ohne die Grundflächen) einem Rechteck gleich, dessen Grund-Linie die Kreis-Linie der Grundfläche, dessen Höhe aber die Höhe des Cylinders ist. Ist daher r der Radius der Grundfläche und h die Höhe, so ist der Mantel $=2hr\pi$.**)

---

*) Man kann auch so schließen; Es ist

$$\sqrt{G}:\sqrt{g}=H:h,$$

also

$$\sqrt{G}-\sqrt{g}:\sqrt{g}=H-h:h=a:h$$

$$\sqrt{G}-\sqrt{g}:\sqrt{G}=H-h:G=a:H,$$

also

$$h=\frac{a\cdot\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} \quad \text{und} \quad H=\frac{a\cdot\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}.$$

**) Den Mantel eines schiefen Cylinders kann man nur mittelst solcher Sätze finden, die in das Gebiet der „höhern Geometrie“ (und der „höhern Analysis“) gehören.

§. 215. 1) Einen gemeinen Kegel kann man sich wie eine Pyramide denken, welche ein reguläres Unendlich-Vieleck d. h. eine Kreisfläche zur Grundfläche hat. — Ein abgekürzter Kegel wird daher wie eine abgekürzte Pyramide gedacht.

2) Daher wird der Inhalt eines Kegels gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und davon den 3ten Theil nimmt. — Ist also r der Radius der Grundfläche und h die Höhe, so ist der Inhalt $=\frac{1}{3}hr^2\pi$.

3) Der Inhalt eines parallel abgekürzten Kegels, dessen Grundflächen die Radien R und r haben, und welcher die Höhe a hat, ist daher (nach §. 213. Nr. 6.), weil jetzt $G=R^2\pi$ und $g=r^2\pi$ ist,

$$=\frac{1}{3}a\pi(R^2+Rr+r^2) \text{ oder } =\frac{1}{3}a\pi\cdot\frac{R^3-r^3}{R-r}.\text{*)}$$

4) Die Gerade, welche den Mittelpunkt der Grundfläche mit der Spitze des Kegels verbindet, heißt die Axe des Kegels; und der Kegel heißt ein senkrechter oder gleichseitiger, wenn diese Axe auf der Grundfläche senkrecht steht. Außerdem wird er ein schiefer Kegel genannt.

5) Im senkrechten Kegel ist der Mantel (d. h. die Oberfläche ohne die Grundfläche) einem Kreis-Sektor gleich, dessen Bogen die Peripherie der Grundfläche, dessen Radius die Seite des Kegels ist. (Er rollt sich auf einer Ebene so ab.) — Ist daher r der Radius der Grundfläche und h seine Höhe, so ist seine Seite $=\sqrt{h^2+r^2}$, daher sein Mantel $=r\pi\cdot\sqrt{h^2+r^2}$.

6) Soll der Mantel eines senkrechten und parallel abgekürzten Kegels, dessen Grundflächen die Radien R und r und den Abstand a von einander haben, berechnet werden, so berechne man zuerst die Seite b des abgekürzten Kegels, nämlich

$$b=\sqrt{(R-r)^2+a^2},$$

und nehme dann den Mantel $=b(R+r)\cdot\pi$.**)

---

*) Man kann auch die Höhen H und h der beiden Kegel direkt berechnen aus den Proportionen $R:r=H:h$, also $R-r:r=a:h$, und $R-r:R=a:H$; und so den Inhalt direkt finden.

**) Den Mantel eines schiefen Kegels kann man nur mittelst der Lehren der sogenannten „höhern Geometrie" finden.

Dieser Mantel wird daher gefunden, wenn man den Umfang des mittleren Querschnittes mit der Seite b des abgekürzten Kegels multiplicirt.

Ist S die Seite des ganzen Kegels, s die des kleinern abgeschnittenen, so sind die Mäntel dieser beiden bezüglich πRS und πrs; daher der Mantel des abgekürzten Kegels $= \pi(RS - rs)$. — Nun ist aber $S = \frac{b \cdot R}{R - r}$ und $s = \frac{b \cdot r}{R - r}$, und daraus folgt zuletzt das Obige.

§. 216. Von der Kugel wollen wir noch anführen:

1) Jede Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, welcher desto kleiner ist, je weiter er vom Mittelpunkt der Kugel abliegt. Der größeste Kreis der Kugel ist derjenige, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgeht, welcher also mit der Kugel selbst den Mittelpunkt und den Radius gemeinschaftlich hat.

2) Die Gerade, welche den Mittelpunkt der Kugel mit dem Mittelpunkt irgend eines kleinen Kreises verbindet, steht senkrecht auf der Ebene des letztern, wird, ihrer Lage nach (d. h. unendlich lang gedacht) dessen Axe genannt, und die beiden Punkte, wo solche die Kugel-Oberfläche trifft, heißen die beiden Pole dieses Kugel-Kreises.

3) Parallel-Kreise der Kugel haben eine gemeinschaftliche Axe und daher auch gemeinschaftliche Pole.

4) Denkt man sich um die Kugel einen Cylinder beschrieben, welcher den Durchmesser 2R der Kugel zur Höhe und den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche hat, so lassen sich nachstehende Sätze beweisen (Fig. 18.):

a) Legt man mit der Grundfläche dieses umschriebenen Cylinders parallel zwei Ebenen LM und NP durch die Figur, so schneiden diese von der Kugel eine Kugel-Zone lmpn, vom Cylinder-Mantel aber eine Cylinder-Zone LMPN ab. — Diese beiden Oberflächen sind allemal einander gleich und beide $= 2R\pi \cdot h$, wenn h der senkrechte Abstand der beiden, die Kugel-Zone bildenden Kreisflächen von einander ist.

Man beweist den Satz zuerst für eine unendlich dünne Zone, indem man ihre Oberfläche (nach §. 215. Nr. 6.) wie einen abgekürzten Kegel-Mantel berechnet, wo dann die Gleichheit mit dem berechneten Cylinder-Mantel mittelst eines Paares ähnlicher Dreiecke in die Augen fällt. — Jede dickere Zone läßt sich aber in lauter solche dünne zerlegt denken.

b) Daher ist der Inhalt einer Kugel-Mütze (Calotte) nGp (d. h. des Stücks der Kugel-Oberfläche, welches eine Ebene NnpP abschneidet), allemal der Cylinder-Zone CNPD gleich, also allemal $=2R\pi\cdot H$, wenn H die Höhe GR des Kugel-Abschnitts (Segments) ist.

c) Daher ist die ganze Kugel-Oberfläche allemal dem ganzen umschriebenen Cylinder-Mantel gleich, also $=4R^2\pi$; d. h. das 4fache der Fläche ihres größten Kreises.

5) Auch wird der Inhalt der Kugel gefunden, wenn man ihre Oberfläche mit ihrem Radius multiplicirt und den dritten Theil nimmt; in so fern die Kugel aus ihrem Mittelpunkte in unendlich viele unendlich kleine Pyramidchen zertheilt gedacht werden kann. — Solcher Inhalt ist also $=\frac{4}{3}R^3\pi$; also gerade $\frac{2}{3}$ des Inhalts des umschriebenen Cylinders, welcher letztere Inhalt $=2R^3\pi$ gefunden wird.

6) Ein Kugel-Sektor lGmH besteht aus einem (senkrechten) Kegel lmH, der seine Spitze in dem Mittelpunkt H der Kugel hat und dessen Grundfläche ein kleiner Kreis der Kugel ist, — und aus dem Kugel-Abschnitt (Kugel-Segment) lGml. — Der Inhalt des Kugel-Sektors wird nun gefunden, wenn man die Kugel-Mütze (Calotte) mit dem Radius multiplicirt und dann den dritten Theil nimmt. — Solcher Inhalt ist daher $=\frac{2}{3}R^2\pi H$, wenn R der Radius der Kugel, und H die Höhe des Kugel-Segments ist.

7) Der Inhalt des Kugel-Abschnittes wird gefunden, wenn man vom Inhalt $\frac{2}{3}R^2\pi H$ des Kugel-Ausschnitts (Sektors), den Inhalt $\frac{1}{3}r^2\pi(R-H)$ des Kegels subtrahirt. — Weil aber $H:r=r:2R-H$ ist, also $r^2=2RH-H^2$, so findet sich der gedachte Inhalt noch $=\pi(R-\frac{1}{3}H)\cdot H^2$.

8) Wollte man den Inhalt des Stückes einer Kugel finden,

welches von zweien kleineren Kreisen gebildet wird (die sich nicht innerhalb der Kugel schneiden), so müßte man zuvor (nach 7.) den Inhalt der beiden Kugel-Abschnitte finden und dann letztere von einander subtrahiren.

Der körperlichen Geometrie

Drittes Kapitel.

Sphärische Trigonometrie.

§. 217. Die körperliche Trigonometrie beschäftigt sich mit der Aufgabe: Wenn von den 6 Stücken eines körperlichen Dreiecks, nämlich den drei Seiten a, b, c (welches Linien-Winkel der ebenen Geometrie sind) und den 3 bezüglich gegenüber liegenden Winkeln α, β, γ, desselben (welches Flächen-Winkel sind, die man jedoch durch die entsprechenden Linien-Winkel oder Neigungs-Winkel repräsentiren läßt), irgend drei gegeben sind, die übrigen durch Rechnung zu finden.

Man nennt diese körperliche Trigonometrie auch die sphärische, weil man sich häufig das körperliche Dreieck OABC mit seiner Spitze in den Mittelpunkt einer Kugel gestellt denkt, so daß die Seiten desselben auf der Oberfläche der Kugel 3 größte Kreisbogen ausschneiden, welche die Figur eines krummflächigen und krummlinigen Dreiecks bilden. Dieses letztere wird das sphärische Dreieck genannt, und die 3 Seiten A′B′, A′C′, B′C′ desselben, wenn man sie in Bogen-Graden ausdrückt (wo 90 auf den Quadranten gerechnet werden), stellen dann die Linien-Winkel a, b, c vor in Graden ausgedrückt. Denkt man sich aber an die 3 Kreisbogen in deren Endpunkten, Tangenten gezogen (welche auf OA′, OB′, OC′ senkrecht stehen), so bilden diese Tangenten unter sich die Neigungs-Winkel α, β, γ (nach §. 207.). — Wir fahren jedoch fort, das körperliche Dreieck zu betrachten, und nehmen die Betrachtung

der sphärischen Dreiecke nur dann hinzu, wenn uns solches bequem zu sein scheint.

§. 218. Um die Aufgabe in ihrem ganzen Umfange und auf einmal zu lösen, muß man zwischen a, b, c, α, β und γ, 3 Gleichungen aufsuchen. Diese, algebraisch behandelt, werden dann irgend drei Stücke finden lassen, wenn die übrigen 3 gegeben sind.

Um nun diese drei Gleichungen zu finden, nehme man OC (Fig. 51.) der Längen-Einheit gleich, fälle auf die gegenüber liegende Seite AOB die Senkrechte (das Loth) CD, ziehe DB und DA bezüglich senkrecht auf OB und OA, und ziehe dann CB und CA, so hat man die rechtwinkligen Dreiecke OAC, OBC, CDA, CDB, und in diesen ist (nach §. 208. Nr. 4.) W. CAD $= \alpha$, W. CBD $= \beta$; und noch (wegen OC $= 1$) AC $= sin\,$b, BC $= sin\,$a, also CD $=$ CA $\cdot\, sin\,\alpha = sin\,$b $\cdot\, sin\,\alpha$, auch CD $=$ CB $\cdot\, sin\,\beta = sin\,$a $\cdot\, sin\,\beta$. Diese 2 Ausdrücke für die Senkrechte CD geben daher

$sin\,a \cdot sin\,\beta = sin\,b \cdot sin\,\alpha$, oder $sin\,a : sin\,b = sin\,\alpha : sin\,\beta$,

d. h. die Sinus der Seiten verhalten sich wie die Sinus der Gegenwinkel.

Weil man auf dieselbe Weise statt α und β, auch α und γ, oder β und γ in Rechnung bringen kann, so erhält man sonach das erste System von Gleichungen, nämlich

$$\text{I.}\quad \frac{sin\,a}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,b}{sin\,\beta} = \frac{sin\,c}{sin\,\gamma},$$

welche Gleichheiten die Stelle zweier von einander unabhängigen Gleichungen vertreten.

§. 219. Zieht man noch (Fig. 51.) AE parallel mit DB, also senkrecht auf OB, und DF parallel mit OB, also senkrecht auf AE, so kann man sogleich noch OB doppelt ausdrücken und dadurch neue Gleichungen erhalten. Es ist nämlich noch OB $= cos\,$a, OA $= cos\,$b, OE $=$ OA $\cdot\, cos\,$c $= cos\,$b $\cdot\, cos\,$c; ferner, weil auch W. DAF $=$ W. AOB $=$ c ist, BE $=$ DF $=$ DA $\cdot\, sin\,$c $=$ CA $\cdot\, cos\,\alpha \cdot sin\,$c $= sin\,$b $\cdot\, cos\,\alpha \cdot sin\,$c.

Dies giebt für OB einen zweiten Ausdruck und man hat

die verlangte Gleichung, welche sogleich wieder als eine dreifache hingeschrieben werden kann, in so fern jeder der 3 Winkel gleichmäßig berücksichtigt wird. Man hat daher das **zweite System von Gleichungen**, nämlich

$$\text{II.} \begin{cases} \cos \mathrm{a} = \cos \mathrm{b} \cdot \cos \mathrm{c} + \sin \mathrm{b} \cdot \sin \mathrm{c} \cdot \cos \alpha \\ \cos \mathrm{b} = \cos \mathrm{a} \cdot \cos \mathrm{c} + \sin \mathrm{a} \cdot \sin \mathrm{c} \cdot \cos \beta \\ \cos \mathrm{c} = \cos \mathrm{a} \cdot \cos \mathrm{b} + \sin \mathrm{a} \cdot \sin \mathrm{b} \cdot \cos \gamma. \end{cases}$$

Diese 3 Gleichungen sind alle 3 von einander unabhängig. Sie allein lösen daher das ganze Problem, und wenn man noch die Gleichungen I. zu Hülfe nimmt, so muß man daran denken, daß diese Gleichungen I. nicht aus der Figur abgeleitet zu werden brauchen, sondern aus den Gleichungen II. als bloße algebraische Folgerungen hervorgehen müssen.*)

§. 220. Denkt man sich zu dem in Rede stehenden Dreiecke das **Ergänzungs-Dreieck** (§. 211. Nr. 2.), dessen Seiten a', b', c', dessen Winkel α', β', γ' so sind, daß man $\mathrm{a}+\alpha' = \mathrm{b}+\beta' = \mathrm{c}+\gamma' = \alpha+\mathrm{a}' = \beta+\mathrm{b}' = \gamma+\mathrm{c}' = 180^\circ$ hat, — substituirt man in die Gleichungen II., weil solche für **jedes** Dreieck, also auch für das Ergänzungs-Dreieck gelten, statt a, b, c, α, β, γ bezüglich a', b', c', α', β', γ', und setzt man zuletzt statt $\sin \mathrm{a}'$, $\cos \mathrm{a}'$, bezüglich die ihnen gleichen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, u. s. w. f., so erhält man das **dritte System von Gleichungen**, deren Festhaltung bequem ist, nämlich:

$$\text{III.} \begin{cases} \cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \mathrm{a}; \\ \cos \beta = -\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos \mathrm{b}; \\ \cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \mathrm{c}. \end{cases}$$

Auch diese Gleichungen sind 1) nur bequem, nicht noth-

---

*) Findet man aus den Gleichungen II., $\cos\alpha$ und $\cos\beta$, daraus nachgehends $\sin\alpha$ und $\sin\beta$, nämlich $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos\alpha^2} = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$, und dividirt man dann letztere durch einander, so erhält man sogleich $\sin\alpha : \sin\beta = \sin \mathrm{a} : \sin \mathrm{b}$, wenn man nur sich überzeugt, daß die Zähler in den für $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ gefundenen Ausdrücken dieselben sind.

wendig, und können 2) aus den Gleichungen II. auf bloß algebraischem Wege abgeleitet werden.

§. 221. Eliminirt man aus den beiden erstern der Gleichungen II. die Seite a, nämlich *cos* a und *sin* a (letzteres aus $\sin a = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$, so erhält man eine Gleichung zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, welche wieder sogleich als eine sechsfache geschrieben werden kann, nämlich

$$\text{IV.} \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cdot \cot g\, \beta + \cos \alpha \cdot \cos c = \sin c \cdot \cot g\, b; \\ \sin \alpha \cdot \cot g\, \gamma + \cos \alpha \cdot \cos b = \sin b \cdot \cot g\, c; \\ \sin \beta \cdot \cot g\, \alpha + \cos \beta \cdot \cos c = \sin c \cdot \cot g\, a; \\ \sin \beta \cdot \cot g\, \gamma + \cos \beta \cdot \cos a = \sin a \cdot \cot g\, c; \\ \sin \gamma \cdot \cot g\, \alpha + \cos \gamma \cdot \cos b = \sin b \cdot \cot g\, a; \\ \sin \gamma \cdot \cot g\, \beta + \cos \gamma \cdot \cos a = \sin a \cdot \cot g\, b. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen IV. werden eben so einfach auch aus den Gleichungen III. abgeleitet.

§. 222. Soll nun aus den 3 Seiten a, b, c eines Dreiecks einer der Winkel, z. B. *α*, gefunden werden, so nimmt man die Gleichungen II., und die erste davon giebt sogleich

$$1) \qquad \cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Daraus findet sich wieder sogleich, wenn a + b + c = s gesetzt wird (aus §. 188. Nr. Nr. 3. und 4.)

$$2) \qquad \sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - c) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin b \cdot \sin c}};$$

eben so $\cos \frac{1}{2} \alpha$; dann (aus §. 185.)

$$3) \qquad tg\, \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - c) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}}.$$

Vertauscht man hier *α* und *β*, zugleich aber auch a und b mit einander, so erhält man $\cos \beta$, $\sin \frac{1}{2}\beta$, $tg \frac{1}{2}\beta$. — Eben so findet sich dann auch der dritte Winkel *γ*.

§. 223. Soll aber aus den 3 gegebenen Winkeln *α*, *β*, *γ*, eine der Seiten, z. B. a, gefunden werden, so nimmt man die Gleichungen III.; — die erstere derselben giebt sogleich

$$1)\qquad cos\ \mathrm{a} = \frac{cos\,\alpha + cos\,\beta \cdot cos\,\gamma}{sin\,\beta \cdot sin\,\gamma}.$$

Daraus findet sich wiederum sogleich $sin\tfrac{1}{2}\mathrm{a}$, $cos\tfrac{1}{2}\mathrm{a}$, $tg\tfrac{1}{2}\mathrm{a}$, nämlich, wenn $\alpha+\beta+\gamma=\sigma$ gesetzt wird,

$$2)\qquad sin\ \tfrac{1}{2}\ \mathrm{a} = \sqrt{\frac{-cos\,\tfrac{1}{2}\sigma \cdot cos\,(\tfrac{1}{2}\sigma-\alpha)}{sin\,\beta \cdot sin\,\gamma}};$$

$$3)\qquad tg\ \tfrac{1}{2}\ \mathrm{a} = \sqrt{\frac{-cos\,\tfrac{1}{2}\sigma \cdot cos\,(\tfrac{1}{2}\sigma-\alpha)}{cos(\tfrac{1}{2}\sigma-\gamma) \cdot cos(\tfrac{1}{2}\sigma-\beta)}}.$$

§. 224. Sollen aber, wenn in einem körperlichen Dreieck 2 Winkel α und β und die eingeschlossene Seite c gegeben sind, die beiden andern Seiten a und b gefunden werden, so bedient man sich dazu der beiden neuen Gleichungen

$$\mathrm{V.}\ \begin{cases} 1)\ tg\,\tfrac{1}{2}(\mathrm{b}-\mathrm{a}) = tg\,\tfrac{1}{2}\mathrm{c} \cdot \dfrac{sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)}{sin\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)}, \\ 2)\ tg\,\tfrac{1}{2}(\mathrm{b}+\mathrm{a}) = tg\tfrac{1}{2}\mathrm{c} \cdot \dfrac{cos\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)}{cos\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)}, \end{cases}$$

aus welchen zuerst $\tfrac{1}{2}(\mathrm{b}-\mathrm{a})$ und $\tfrac{1}{2}(\mathrm{b}+\mathrm{a})$, dann aber b und a selbst gefunden werden. Um γ zu finden, muß man zuletzt noch die Gleichungen I. anwenden.

Man verschafft sich diese Gleichungen V. auf folgende Art: Aus den Gleichungen I. folgert man

$$1)\qquad \frac{sin\,\mathrm{a}}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,\mathrm{b}}{sin\,\beta} = \frac{sin\,\mathrm{c}}{sin\,\gamma} = \frac{sin\,\mathrm{b}+sin\,\mathrm{a}}{sin\,\beta+sin\,\alpha} = \frac{sin\,\mathrm{b}-sin\,\alpha}{sin\,\beta-sin\,\alpha},$$

verwandelt die Summe und die Differenz der Sinus in Produkte, und erhält aus den letztern beiden gleichen Ausdrücken sogleich

$$2)\qquad \frac{tg\,\tfrac{1}{2}(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{tg\,\tfrac{1}{2}(\mathrm{b}+\mathrm{a})} = \frac{tg\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)}{tg\,\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)}.$$

Hernach nimmt man die beiden erstern der Gleichungen II., bringt die Glieder $cos\,\mathrm{b} \cdot cos\,\mathrm{c}$ und $cos\,\mathrm{a} \cdot cos\,\mathrm{c}$ auf die andere Seite, und dividirt sie durch einander, rechts $\frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha}$ statt $\frac{sin\,\mathrm{b}}{sin\,\mathrm{a}}$ setzend, so daß man erhält

$$\frac{cos\,\mathrm{a} - cos\,\mathrm{b} \cdot cos\,\mathrm{c}}{cos\,\mathrm{b} - cos\,\mathrm{a} \cdot cos\,\mathrm{c}} = \frac{sin\,\beta \cdot cos\,\alpha}{sin\,\alpha \cdot cos\,\beta}.$$

Addirt man hierzu 1 auf beiden Seiten, subtrahirt man 1 auf beiden Seiten, und dividirt man beide Resultate durch einander, so giebt dies

$$\frac{cos\,\mathrm{a} - cos\,\mathrm{b}}{cos\,\mathrm{a} + cos\,\mathrm{b}} \cdot \frac{1 + cos\,\mathrm{c}}{1 - cos\,\mathrm{c}} = \frac{sin\,(\beta-\alpha)}{sin\,(\beta+\alpha)}.$$

Verwandelt man hier die Summen und Differenzen zur Linken in Produkte, so erhält man, weil noch $sin\, v = 2\, sin\, \frac{1}{2}v \cdot cos\, \frac{1}{2}v$ ist,

$$3)\; tg\, \tfrac{1}{2}(b-a) \cdot tg\, \tfrac{1}{2}(b+a) \cdot cotg\, \tfrac{1}{2}c^2 = \frac{sin\, \frac{1}{2}(\beta-\alpha) \cdot cos\, \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{sin\, \frac{1}{2}(\beta+\alpha) \cdot cos\, \frac{1}{2}(\beta+\alpha)}.$$

Multiplicirt und dividirt man jetzt die Gleichungen 2'. und 3'. mit und durch einander, so erhält man die V.

§. 225. Sind aus zweien Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel γ, die beiden andern Winkel α und β zu berechnen, so wendet man dazu abermals neue Gleichungen an, nämlich

$$\text{VI.} \begin{cases} 1)\; tg\, \frac{1}{2}(\beta-\alpha) = cotg\, \frac{1}{2}\gamma \cdot \dfrac{sin\, \frac{1}{2}(b-a)}{sin\, \frac{1}{2}(b+a)}, \\ 2)\; tg\, \frac{1}{2}(\beta+\alpha) = cotg\, \frac{1}{2}\gamma \cdot \dfrac{cos\, \frac{1}{2}(b-a)}{cos\, \frac{1}{2}(b+a)}, \end{cases}$$

welche aus I. und III. auf ganz analoge Weise gefunden werden, wie die Gleichungen V. aus I. und II. Auch kann man die VI. aus den Gleichungen V. so ableiten, wie die III. aus der II. erhalten worden sind. — Diese Gleichungen V. und VI. nennt man auch die Neper'schen Analogien.

Wird die dritte Seite c auch noch gesucht, so nimmt man zuletzt noch die Gleichungen I. zu Hülfe.

Anmerkung. In allen übrigen Aufgaben, wo aus 3en der 6 Stücke des Dreiecks die übrigen 3 Stücke gefunden werden sollen, reichen die Gleichungen I. aus.

§. 225ª. Wir theilen noch die Formeln mit, deren Gebrauch Gauß in seiner theoria motus etc. etc. (pag. 51.) zuerst empfohlen hat. Es sind dies folgende:

$$\text{VII.} \begin{cases} 1)\; \dfrac{sin\, \frac{1}{2}(b-a)}{sin\, \frac{1}{2}c} = \dfrac{sin\, \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{cos\, \frac{1}{2}\gamma}; \\ 2)\; \dfrac{sin\, \frac{1}{2}(b+a)}{sin\, \frac{1}{2}c} = \dfrac{cos\, \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{sin\, \frac{1}{2}\gamma}; \\ 3)\; \dfrac{cos\, \frac{1}{2}(b-a)}{cos\, \frac{1}{2}c} = \dfrac{sin\, \frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{cos\, \frac{1}{2}\gamma}; \\ 4)\; \dfrac{cos\, \frac{1}{2}(b+a)}{cos\, \frac{1}{2}c} = \dfrac{cos\, \frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{sin\, \frac{1}{2}\gamma}, \text{*)} \end{cases}$$

---

*) Dividirt man diese Gleichungen paarweise durch einander, namentlich die 1. durch die 2. und 3., dann die 2. und 3. durch die 4., so erhält

welche gelten, so lange nur hohle Winkel in Betrachtung kommen, und welche, wenn man links und rechts immer nur die positiven Werthe behält, auch für die Fälle wahr sind, wo Seiten oder Winkel größer als 180° gedacht werden.

Man findet diese Formeln augenblicklich aus den Neper'schen Analogien V. und VI., wenn man V. 1. und 2. durch VI. 1. und 2. bezüglich dividirt, dann aber aus den Gleichungen I. findet

$$\frac{sin\, a}{sin\, \alpha} = \frac{sin\, b}{sin\, \beta} = \frac{sin\, c}{sin\, \gamma} = \frac{sin\, b + sin\, a}{sin\, \beta + sin\, \alpha} = \frac{sin\, b - sin\, a}{sin\, \beta - sin\, \alpha},$$

d. h.

$$\frac{sin\, \frac{1}{2}c \cdot cos\, \frac{1}{2}c}{sin\, \frac{1}{2}\gamma \cdot cos\, \frac{1}{2}\gamma} = \frac{sin\, \frac{1}{2}(b+a) \cdot cos\, \frac{1}{2}(b-a)}{sin\, \frac{1}{2}(\beta+\alpha) \cdot cos\, \frac{1}{2}(\beta+\alpha)} = \text{etc. etc.},$$

und diese Gleichung zu Hülfe nimmt, um aus jenen kurz vorher erhaltenen 4 Gleichungen abwechselnd $sin\, \frac{1}{2}c$ oder $cos\, \frac{1}{2}c$ zu eliminiren. Man muß zuletzt immer noch die Quadrat-Wurzeln nehmen, weshalb, wenn die Formeln ganz allgemein wahr sein sollen, jedesmal auf einer Seite der =Zeichen ein $\pm$ gesetzt werden muß.

Diese Gaußischen Formeln empfehlen sich eben so sehr durch ihre Einfachheit, als auch dadurch, daß sie auf gleich bequeme Weise gebraucht werden können, es mögen 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder 2 Winkel und die zwischen liegende Seite gegeben sein. Es werden natürlich immer zwei derselben mit einander in Verbindung angewandt, und man hat jedesmal zugleich eine bequeme Controle der Rechnung.

§. 226. Alle diese Gleichungen gelten auch noch, wenn einer oder mehrere Winkel des Dreiecks rechte Winkel sind. Wegen des häufigen Vorkommens der rechtwinkligen Dreiecke, thut man aber wohl, die gewöhnlichen Formeln dafür sich besonders zu merken.

Ist nun γ der rechte Winkel, mithin c die Hypotenuse, sind a und b die beiden Katheten, und α und β bezüglich ihre Gegenwinkel, so ist allemal

---

man die sogenannten Neper'schen Analogien wieder, d. h. die Formeln V. (des §. 224.) und VI. (des §. 225.). — Die obigen Formeln VII. nennt man auch die Gaußischen.

1) $\cos c = \cos a \cdot \cos b$;

2) $\cos c = \cot g\, \alpha \cdot \cot g\, \beta$;

3) $\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$;

4) $tg\, a = \sin b \cdot tg\, \alpha$;

5) $tg\, b = \cos \alpha \cdot tg\, c$;

6) $\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a$.

Diese Formeln folgen aus I.—IV., wenn man $\gamma = 90^0$ setzt, können aber auch direkt aus der Betrachtung der Figur abgeleitet werden, indem man sich ein rechtwinkliges Dreieck denkt, den Neigungs-Winkel α (oder auch β) konstruirt, und die ebenen rechtwinkligen Dreiecke gehörig beachtet.

Der körperlichen Geometrie
Viertes Kapitel.

Von den Projektionen und den Koordinaten im Raume.

A. Von den Projektionen.

§. 227. Ein Punkt p wird auf eine Gerade L projicirt, wenn man sich die Ebene (p, L) denkt, und in ihr von p auf L die senkrechte Linie pp_1 zieht. Der Punkt p_1 heißt dann die Projektion des Punktes p auf die Gerade L.

Eine Gerade AB = L wird auf eine (unendlich gedachte) Gerade OX projicirt, wenn ihre beiden Endpunkte A und B auf sie projicirt werden, so daß die auf OX senkrechten Aa und Bb gezogen gedacht werden. Und dies gilt, es mögen AB und OX (d. h. ab) in derselben Ebene oder in verschiedenen Ebenen liegen; dabei heißt ab die Projektion von AB.

Ist aber α der Winkel, den AB mit OX oder mit einer durch A mit der OX parallel gedachten Geraden macht, so ist allemal $ab = AB \cdot \cos \alpha = L \cdot \cos \alpha$

oder $ab = -AB \cdot \cos \alpha = -L \cdot \cos \alpha$,

je nachdem α spitz oder stumpf genommen worden ist.

Ein Punkt q wird dagegen auf eine Ebene E projicirt, wenn man auf die Ebene E die Senkrechte qq_1 fällt. Der Punkt q_1 heißt dann die Projektion des Punktes q auf die Ebene E. — Von diesen letztern Projektionen soll hier vorzüglich die Rede sein.

Eine gerade Linie ab wird auf die Ebene E projicirt, wenn man ihre Endpunkte projicirt; sind a_1, b_1 die Projektionen dieser Endpunkte a und b, so heißt die Gerade a_1b_1 die Projektion von ab.

§. 228. Wir denken uns hier zunächst immer zwei auf einander senkrechte Projektions-Ebenen (Koordinaten-Ebenen, Grund-Ebenen), welche sich in der Projektions-Axe schneiden, und von denen wir die eine die horizontale, die andere die vertikale nennen. — Die Horizontal-Projektionen (Grundrisse) gegebener Punkte A, B, C etc. etc. bezeichnen wir immer durch A_1, B_1, C_1, etc. etc.; die Vertikal-Projektionen (Aufrisse) derselben Punkte dagegen immer durch A_2, B_2, C_2, etc. etc.

Die projicirenden Linien BB_1 und BB_2 werden auch die Koordinaten (Ordinaten) des Punktes B genannt.

§. 228ª. Denkt man sich aber die Ebene B_1BB_2 verlängert und die Projektions-Axe in B_0 schneidend, so entsteht allemal ein Rechteck $B_0B_1BB_2$, in welchem die gegenüber stehenden Seiten einander gleich sind, nämlich

$$BB_1 = B_0B_2 \text{ und } BB_2 = B_0B_1.$$

Durch die beiden Projektionen B_1 und B_2, wenn man solche in den beiden Projektions-Ebenen gezeichnet hat, ist der Punkt B völlig gegeben. — Dagegen geben die Längen der Abstände BB_1 und BB_2, wenn man nicht die Zeichnung von B_1 und B_2 selbst hat, den Punkt B nur dann vollkommen, wenn die Lage von B_0 bekannt ist. Man legt daher, wenn ein Punkt B durch die bloße Länge der Koordination gegeben sein soll, allemal noch eine dritte Koordinaten-Ebene senkrecht auf die beiden erstern, welche also auch senkrecht auf der Projektions-Axe steht und solche in O schneiden mag. Denkt man sich B noch auf diese dritte Ebene projicirt, und ist B_3 diese dritte Projektion von B, so ist $BB_3 = OB_0$, und die 3 Längen $BB_1 = x$, $BB_2 = y$, $BB_3 = z$ bestimmen nun den Punkt B vollkommen. Und weil der Punkt B diesseits oder jenseits einer jeden der 3 Koordinaten-Ebenen liegen kann, so drückt man diese verschiedene Lage noch dadurch aus, daß man x, y, z positiv oder negativ nimmt.

§. 229. Wenn man aus dem gegebenen Grundriß und Aufriß, d. h. aus den gegebenen Projektionen der Punkte einer körperlichen Figur, die einzelnen Theile derselben zeichnen soll, so nennt man diesen Theil der geometrischen Konstruktions-Lehre beschreibende Geometrie. Sollen dieselben Theile berechnet werden aus den gegebenen Abständen der Punkte von den Projektions-Ebenen, so gehört dies zur Koordinaten-Theorie und analytischen Geometrie.

§. 230. Von den Projektionen ist nun zu bemerken:

1) Eine gerade Linie AB im Raume ist ihrer Länge und Lage nach völlig gegeben, sobald man ihre beiden Projektionen A_1B_1 und A_2B_2 hat. Man kann dann AB zeichnen.

Denn in dem Parallel-Trapez ABA_1B_1, sind bekannt die Seite A_1B_1, die rechten Winkel bei A_1 und B_1 und die Seiten AA_1 und BB_1 (weil letztere bezüglich den Geraden A_2A_0 und B_2B_0 gleich sind, während man nur in den Projektions-Ebenen von den gegebenen Projektionen A_2, B_2 aus, auf die Projektions-Axe diese senkrechten $A_2\,A_0$, $B_2\,B_0$ ziehen darf, um letztere zu haben). Verzeichnet man aber aus diesen Stücken das Trapez ABA_1B_1 irgendwo hin, z. B. (Fig. 20.), so hat man die Länge AB. Zieht man dann AE parallel mit $A_1\,B_1$, so hat man noch den Neigungs-Winkel BAE gezeichnet, welchen die AB mit der Horizontal-Projektions-Ebene macht. Endlich hat man auch den Winkel ABE, welchen die AB im Raume mit der projicirenden Linie BB_1 macht.

Verlängert man in der Zeichnung (der Figur 20.) die AB, bis sie der $B_1\,A_1$ in D begegnet, so kann man in die Projektions-Ebene den Punkt D eintragen, wo die AB im Raume gehörig verlängert ihr begegnen müßte.

Will man die Länge von AB berechnen, so sei $A_0A_2 = AA_1 = z$, $B_0B_2 = BB_1 = z'$, und $A_1B_1 = 1$, und man hat

$$AB^2 = (z'-z)^2 + 1^2 \text{ und } AB = \sqrt{(z'-z)^2+1^2}.$$

2) Schneiden sich zwei Gerade AB und CD irgendwo im Raume, so schneiden sich auch ihre beiden Projektionen auf eine beliebige Projektions-Ebene. Sind aber die Geraden AB und CB mit einander parallel, so sind auch ihre Projektionen auf irgend eine Projektions-Ebene mit einander parallel.

3) Sind daher in beiden Projektions-Ebenen beide Paare von Projektionen unter sich, aber nicht alle 4 mit der Projektions-Axe parallel, nämlich A_1B_1 mit C_1D_1 und auch A_2B_2 mit C_2D_2, so laufen die Geraden AB und CD mit einander parallel.

4) Ist nur das eine Paar dieser Projektionen, z. B. A_1B_1 mit C_1D_1 parallel, schneidet sich aber zu gleicher Zeit das andere Paar dieser Projektionen A_2B_2 und C_2D_2, so liegen die Linien AB und CD nicht in einer und derselben Ebene. — Das letztere ist aber auch der Fall, wenn beide Paare der Projektionen sich schneiden, so aber, daß die beiden Durchschnitts-Punkte P und Q nicht als die Projektionen eines und desselben Punktes angesehen werden können, d. h. wenn nicht, sobald PP_0 und QQ_0 auf die Projektions-Axe senkrecht gedacht werden, die Punkte P_0 und Q_0 in einen und denselben Punkt zusammenfallen. Fallen aber P_0 und Q_0 wirklich zusammen, so schneiden sich auch nothwendig AB und CD im Raume.

5) Sind von einer Geraden AB im Raume ihre beiden Projektionen A_1B_1 und A_2B_2 gegeben, und will man die Projektionen P_1,P_2 eines beliebigen Punktes P in ihr, so nimmt man P_0 in der Projektions-Axe ganz beliebig, und errichtet aus P_0 Senkrechte auf die Projektions-Axe, bis solche den A_1B_1 und A_2B_2 in P_1 und P_2 begegnen.

Sind zwei in A sich schneidende Gerade AU und AW durch ihre Projektionen gegeben, so kann man in jeder derselben einen Punkt annehmen, B in AU und C in AW (man nimmt z. B. B_1 in A_1U_1 ganz beliebig, zieht dann B_1B_0 senkrecht auf die Projektions-Axe, errichtet nachher in der andern Projektions-Ebene die Gerade B_0S auf die Projektions-Axe senkrecht, und der Durchschnittspunkt B_2 dieser B_0S mit der A_2U_2 wird die 2te Projektion eines Punktes B sein, der in AU liegt, und von welchem B_1 die erste Projektion ist); dann kann man (nach Nr. 1.) die Entfernungen AB, AC und BC zeichnen. Stellt man dann irgendwo diese 3 Seiten zu einem Dreieck zusammen, so hat man auch den Winkel BAC gezeichnet, welchen die sich in A schneidenden Geraden AU und AW unter sich bilden.

§. 231. Eine Ebene V läuft entweder mit einer der Projektions-Ebenen parallel oder mit keiner. Der Durchschnitt der Ebene V mit einer der Projektions-Ebenen heißt ihr **Grundschnitt**, ihr **horizontaler**, oder ihr **vertikaler**. — Ihre **zwei** Grundschnitte V′ und V″ bestimmen die Ebene V ihrer Lage nach völlig. —

1) Ist der eine dieser Grundschnitte mit der Projektions-Axe parallel, so ist es auch der andere (wenn nicht die Ebene

V mit der andern Projektions-Ebene parallel läuft, so daß der andere Grundschnitt gar nicht existirt), und die Ebene V bildet dann mit den beiden Projektions-Ebenen einen prismatischen Raum (nach §. 199. Nr. 2.).

2) Trifft der eine der Grundschnitte die Projektions-Axe in irgend einem Punkte V_0, so trifft der andere Grundschnitt den erstern und die Projektions-Axe in demselben Punkte V_0. (Nach §. 199. Nr. 1.)

3) Beide Grundschnitte können auch mit der Projektions-Axe zusammenfallen, aber nie einer allein. (Nach §. 199.)

4) Steht eine Gerade PQ im Raume, in Q auf einer Ebene V im Raume senkrecht, so stehen P_1Q_1 und V' auf einander senkrecht, so wie auch P_2Q_2 und V'' auf einander senkrecht stehen.

5) Umgekehrt stehen die beiden Projektionen P_1Q_1 und P_2Q_2 bezüglich auf beiden Grundschnitten V' und V'' senkrecht, so steht PQ im Raume auf der Ebene V im Raume, senkrecht.

6) Sind zwei Ebenen unter sich parallel, so sind auch ihre Grundschnitte unter sich parallel.

7) Umgekehrt sind beide Paare Grundschnitte unter sich parallel, so sind auch beide Ebenen parallel.

8) Ist aber nur V' mit W' und nicht zugleich V'' mit W'' parallel, sondern schneiden sich diese letztern in Q, so schneiden sich die Ebenen V und W; jedoch ist dann ihre Durchschnitts-Linie (V, W) mit V' und W' selbst wieder parallel und geht noch durch den Punkt Q.

9) Schneiden sich aber beide Paare Grundschnitte in den Punkten P und Q, so ist die Gerade PQ die Durchschnitts-Linie der Ebenen V und W, und PQ_0 ist ihre Horizontal-Projektion, dagegen P_0Q ihre Vertikal-Projektion.

Schneiden sich zwei Ebenen V und W im Raume, während sie durch ihre Grundschnitte gegeben sind, so kann man den Neigungs-Winkel dieser Ebenen auf folgende Art zeichnen. Man nimmt in der Durchschnitts-Linie (V, W) einen beliebigen Punkt A an (nach §. 230. Nr. 5.), errichtet dann nach Anleitung der Nr. 5., von A aus auf jede der Ebenen V und W eine Senkrechte AB und AC (d. h. man zeichnet die Projektionen A_1B_1 und A_2B_2 bezüglich auf V' und V'' senkrecht, desgleichen die Projektionen A_1C_1 und A_2C_2 bezüglich auf W' und W'' senkrecht),

und zeichnet dann (nach Anleitung des §. 230. zu Ende) den Winkel BAC. — Dieser ist aber (nach §. 208. Nr. 5.) dem Neigungs-Winkel der Ebenen gleich.

10) Es ist in vielen Fällen wichtig zu wissen, ob ein durch seine Projektionen P_1 und P_2 (Fig. 43.) gegebener Punkt P in einer durch ihre Grundschnitte V' und V'' gegebenen Ebene V liegt oder nicht. Man untersucht dies auf folgende Art:

Man zeichnet durch P_1 eine Gerade parallel mit V'; von dem Punkte Q_0 aus, wo solche der Projektions-Axe begegnet, errichtet man $Q_0 Q$ senkrecht auf die Projektions-Axe, bis solche in Q dem zweiten Grundschnitte V'' begegnet. Zuletzt zieht man durch Q mit der Projektions-Axe die Parallele QS. — Geht nun solche durch P_2, so liegt der Punkt P in der Ebene V. — Liegt aber P_2 zwischen der Axe und QS, so liegt P (in der Geraden PP_1) zwischen der Ebene V und der Horizontal-Projektions-Ebene. (Es versteht sich übrigens, daß man vorher untersucht habe, ob P_1 und P_2 wirklich die Projektionen eines Punktes sind, d. h. daß man von P_1 und P_2 senkrechte Linien auf die Projektions-Axe gezogen, und diese in einem und demselben Punkte P_0 zusammenstoßend gefunden habe.)

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender: Liegt der Punkt P wirklich in der Ebene V, so ist die mit V' parallele $P_1 Q_0$ die Projektion der durch P hindurchgehenden, mit V' und mit der Horizontal-Projektions-Ebene parallelen und in der Ebene V liegenden Geraden PQ. Da nun alle Punkte P, Q der, mit der Horizontal-Projektions-Ebene parallelen PQ von dieser Ebene gleich weit abstehen, so muß $PP_1 = QQ_0$, also auch $P_2 P_0 = QQ_0$ sein.

11) Zieht man noch $P_1 \delta$ senkrecht auf V', so ist $P \delta P_1$ der Neigungs-Winkel der Ebene V gegen die Horizontal-Projektions-Ebene (nach §. 208. Nr. 4.). — Weil man aber von dem, bei P_1 rechtwinkligen Dreieck $P \delta P_1$ die Kathete $PP_1 = P_2 P_0$ und die andere Kathete $P_1 \delta$ hat, so kann man solches Dreieck zeichnen, und man hat dann auch den Neigungs-Winkel $P \delta P_1$ der Ebene V gegen die Horizontal-Projektions-Ebene, so wie noch die Entfernung $P\delta$ des Punktes P von dem horizontalen Grundschnitt, gezeichnet.

Beides letztere läßt sich nun aber auch durch **Rechnung** finden.

12) Will man endlich untersuchen, ob eine, durch ihre Projektionen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ gegebene Gerade AB, in einer durch ihre Grundschnitte V′ und V″ gegebenen Ebene V liegt, so darf man nur untersuchen (nach Nr. 10.), ob zwei beliebige ihrer Punkte in der Ebene V liegen.

§. 232. Ist F eine beliebige Figur in einer Ebene V, welche mit einer Projektions-Ebene den Winkel ς macht, und ist F_1 die Projektion der Figur F auf diese Projektions-Ebene, so hat man allemal

$$F_1 = F \cdot \cos \varsigma.$$

Man beweist diesen Satz zuerst von einem (Parallel-) Trapez, dessen zwei parallele Seiten bis zu dem Grundschnitt V′ hinreichen und auf ihm senkrecht stehen. Jede andere ebene Figur, namentlich aber auch jedes Dreieck, läßt sich dann aus lauter solchen (Parallel-) Trapezen durch Addition oder Subtraktion zusammensetzen.

B. Von den Koordinaten.

§. 233. I. Sind (Fig. 21.) XOY, XOZ und YOZ drei auf einander senkrechte **Koordinaten-Ebenen**, welche sich wechselseitig in den **Koordinaten-Axen** OX, OY und OZ schneiden, so ist ein Punkt M durch seine 3 **Koordinaten-Werthe**

$$MM_3 = M_2R = M_1Q = OP = x,$$
$$MM_2 = M_3R = OQ = M_1P = y,$$
und
$$MM_1 = M_2P = M_3Q = OR = z$$

völlig bestimmt und gegeben.*)

---

*) Es sind nämlich durch M 3 Ebenen gelegt, welche mit den 3 Koordinaten-Ebenen bezüglich parallel gedacht werden. Diese 6 Ebenen bilden ein rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen 3 Kanten x, y, z sind, während jede 4 mal vorkommt.

Es ist für den Anfänger besonders wichtig, daß er recht fest halte, wie jede der Axen OX, OY, OZ auf zweien parallelen Ebenen dieses rechtwinkligen Parallelepipedums senkrecht steht, daher auch rechte Winkel bildet mit Geraden, die in diesen Ebenen durch sie gezogen sind. Es steht nämlich OX senkrecht auf $MM_1 M_2P$, daher auch auf der Geraden

II. Dann ist aber auch allemal

1) $$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und

2) $$\cos MOX = \frac{x}{OM}; \cos MOY = \frac{y}{OM}; \cos MOZ = \frac{z}{OM},$$

wo statt OM sein Werth $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gesetzt werden kann.

III. Ist noch ein Punkt N gegeben durch die Koordinaten-Werthe x', y' und z', so hat man aus demselben Grunde

1) $$ON = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

und

2) $$\cos NOX = \frac{x'}{ON}; \cos NOY = \frac{y'}{ON}; \cos NOZ = \frac{z'}{ON}.$$

IV. Dagegen findet sich dann

1) $$MN = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2};$$

und, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Linie MN mit den 3 Axen OX, OY, OZ oder vielmehr mit den Linien MX', MX', MZ' *) macht, welche bezüglich mit den eben erwähnten Axen parallel gedacht werden, so ist noch

2) $$\cos\alpha = \frac{x'-x}{MN}, \cos\beta = \frac{y'-y}{MN} \text{ und } \cos\gamma = \frac{z'-z}{MN}.$$

V. Endlich findet sich noch der so sehr wichtige Satz **)

$$\cos MON = \cos MOX \cdot \cos NOX + \cos MOY \cdot \cos NOY + \cos MOZ \cdot \cos NOZ.$$

Ist daher

$$\cos MOX \cdot \cos NOX + \cos MOY \cdot \cos NOY + \cos MOZ \cdot \cos NOZ = 0,$$

MP, so daß das Dreieck POM bei P rechtwinklig ist. Aus demselben Grunde ist das Dreieck ORM bei R, und das Dreieck OQM bei Q rechtwinklig. Aber eben aus diesen rechtwinkligen Dreiecken folgen die Gleichungen in II. unmittelbar.

*) Eben diese Parallelen MX', MY' und MZ', als neue Koordinaten-Axen gedacht, machen, daß der Punkt N sich gegen M verhält, wie (in I. und II.) der Punkt M gegen O steht. In Bezug auf diese neuen Koordinaten-Ebenen X'MY', X'MZ' und Y'MZ' sind aber die Koordinaten-Werthe des Punktes N bezüglich $x'-x$, $y'-y$ und $z'-z$.

**) Man findet diesen *cos* MON aus der bekannten trigonometrischen Formel

$$MN^2 = MO^2 + NO^2 - 2 \cdot MO \cdot NO \cdot \cos MON,$$

indem man statt MN, MO, NO die Werthe (aus II. III. IV.) setzt.

so ist der Winkel MON ein rechter, und die Geraden OM und ON stehen auf einander senkrecht.

Anmerkung. Alle diese Sätze gelten auch noch, wenn die Punkte M und N in einer und derselben Ebene liegen sollten, in welcher dann die Axen OX und OY angenommen werden können. Man hat aber dann $z = o$, $z' = o$, $cos\,MOZ = o$, $cos\,NOZ = o$; also wird jetzt

$$1)\ MO = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$2)\ cos\,MOX = \frac{x}{OM}; \text{ und } cos\,MOY = \frac{y}{OM};$$

ferner $$3)\ NO = \sqrt{x'^2 + y'^2};$$

$$4)\ cos\,NOX = \frac{x'}{ON}; \text{ und } cos\,NOY = \frac{y'}{ON};$$

endlich $$5)\ MN = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2},$$

so wie $$6)\ cos\,\alpha = \frac{x'-x}{MN},\ cos\,\beta = \frac{y'-y}{MN},\ cos\,\gamma = o.$$

Zuletzt aber ist noch

$$(\text{☾}) \cdots cos\,MON = cos\,MOX \cdot cos\,NOX + cos\,MOY \cdot cos\,NOY.$$

Und die Gleichung

$$(\odot) \cdots cos\,MOX \cdot cos\,NOX + cos\,MOY \cdot cos\,NOY = o$$

zeigt an, daß der Winkel MON ein rechter ist.

Weit einfacher und unmittelbar erhält man aber diese Gleichung durch Anwendung des Satzes Anmerkung 1. zu §. 196[a], indem man $OM = 1$ nimmt, damit (Fig. 21.) OP, PM_2 und MM_2, als Seiten des Parallelepipeds, bezüglich die Kosinus der Winkel MOX, MOY, MOZ sind; dann aber das (unebene) Viereck OPM_2MO, auf die neue Richtung ON (die in der Figur 21. nicht zu sehen ist) projicirt.

Ueberhaupt gewährt dieser Satz fast in allen Fragen der Koordinaten-Theorie die unmittelbarsten Antworten.

Anhang.

Einiges über Reihen, über Permutationen und Kombinationen; nebst dem Beweise des binomischen Lehrsatzes.

I. Von den arithmetischen Reihen der ersten Ordnung.

§. 1. Eine Reihe von Gliedern, z. B. 2, 5, 8, 11, 14,... in welcher die Unterschiede zwischen jedem folgenden Gliede und seinem vorhergehenden einander gleich werden, heißt eine arithmetische Progression (arithmetische Reihe) der ersten Ordnung, auch schlechtweg eine „arithmetische Progression" oder „arithmetische Reihe."

§. 2. Ist a das erste Glied, u das n^{te} Glied, d der Unterschied je zweier Glieder, und s die Summe aller n Glieder einer solchen arithmetischen Progression, so hat man allemal

$$\text{I.}\quad u = a + (n-1)\cdot d \quad\text{und}\quad \text{II.}\quad s = \frac{(a+u)\cdot n}{2},\text{*)}$$

$$\text{auch}\quad s = n\cdot a + \frac{n(n-1)}{2}\cdot d.$$

*) Die Formel I. fällt in die Augen, wenn man bemerkt, daß jedes folgende Glied um d größer ist, als das vorhergehende, daß also das n^{te} Glied um $n-1$ solche d größer sein muß, als das erste.

Die Formel II. dagegen fällt in die Augen, wenn man sich die gegebene Reihe $a, a+d, a+2d, \cdots u-d, u$, der n Glieder in umgekehrter Ordnung darunter geschrieben denkt, und dann die Summe 2S aller Glieder nimmt; je zwei unter einander stehende geben $a+u$; also geben alle 2n Glieder das nfache von $a+u$; folglich ist $2S = (a+u)\cdot n$.

Sind nun von den 5 Werthen a, d, n, u, s irgend drei gegeben, so lassen sich die beiden übrigen allemal unmittelbar dazu finden, weil man zwei Gleichungen hat zwischen den jedesmaligen beiden Unbekannten.

II. Von den arithmetischen Reihen der 2ten Ordnung.

§. 3. Bilden in einer Reihe von Gliedern

6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, rc. rc.

die Unterschiede je zweier auf einander folgenden dieser Zahlen, nämlich

5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, rc. rc.

eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung, so nennt man die erstere Reihe selbst eine arithmetische Progression (Reihe) der zweiten Ordnung.

§. 4. Ist a das erste Glied, u das n^{te} Glied, s die Summe aller n Glieder einer solchen arithmetischen Reihe der 2ten Ordnung; ist ferner d das erste Glied ihrer Differenzen-Reihe (d. h. der Unterschied zwischen dem 1sten und 2ten Gliede der Hauptreihe), so wie d′ der Unterschied der Glieder in der Differenzen-Reihe, so ist allemal

$$\text{I.}\quad u = a + (n-1)\cdot d + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\cdot d';$$

$$\text{II.}\quad s = na + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot d + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot d'.\text{*)}$$

1stes Beispiel. Nach dieser Formel II. findet sich die Summe der n ersten Quadrat-Zahlen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, rc. rc.

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3}.$$

So groß ist also z. B. die Anzahl der Kugeln in einem Kugel-Haufen, dessen Grundfläche ein Quadrat von n Kugeln ist, und welcher ganz voll vorausgesetzt wird, so daß er aus n Schichten besteht.

2tes Beispiel. Hat man dagegen die Reihe

$1\cdot m,\quad 2\cdot(m+1),\quad 3\cdot(m+2),\quad 4\cdot(m+3),\quad 5\cdot(m+4),\cdots$

---

*) Man beweist diese Formeln dadurch, daß man probirt, ob sie für n = 2 gelten; dann aber darthut, daß sie immer für jede um Ein's größere Zahl n = h + 1 gelten, wenn sie für n = h zutreffen, während h irgend eine einzige bestimmte Zahl vorstellt.

so findet sich nach II. die Summe ihrer n ersten Glieder

$$= \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{2 \cdot 3}.$$

So groß ist also die Anzahl der Kugeln in einem Kugel-Haufen, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, der ganz voll vorausgesetzt wird, dessen Rücken m Kugeln hat (so daß also die längere Seite des Rechtecks m — 1 Kugeln mehr hat, als die kürzere Seite); und wo die kürzere Seite der Grundfläche gerade n Kugeln zählt.

3tes Beispiel. Die Summe der Triangular-Zahlen

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ꝛc. ꝛc.

deren n^{te} durch $\frac{n(n+1)}{2}$ ausgedrückt ist, findet sich dagegen (nach II.)

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}.$$

So groß ist also ein Kugel-Haufen, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck bildet von n Kugeln in jeder Seite, und welcher voll ist, so daß er aus n Schichten besteht. *)

Anmerkung. Die einzelnen Schichten in jedem Kugel-Haufen, welche Gestalt seine Grundfläche haben mag, und wenn er voll ist oder nicht, bilden allemal eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung. Die Anzahl aller Kugeln wird daher immer nach II. gefunden, wenn nur für jeden gegebenen Fall a, d, d′ und n gehörig bestimmt werden.

III. Von den arithmetischen Reihen der dritten und höhern Ordnungen.

§. 5. Bilden die Unterschiede der Glieder einer Zahlen-Reihe eine arithmetische Reihe der 2^{ten} Ordnung, so wird die Hauptreihe selbst eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung genannt.

Ist a das erste, u das n^{te} Glied, s die Summe aller n Glieder einer solchen arithmetischen Reihe der 3^{ten} Ordnung; ist ferner d das erste Glied ihrer ersten Differenzen-Reihe, d′ das erste Glied ihrer zweiten Differenzen-Reihe, und d″ der Unterschied der Glieder in dieser letztern, so hat man immer

*) Ist ein Kugel-Haufen nicht voll, so kann man ihn doch voll denken, die Zahl der Kugeln in ihm unter dieser Voraussetzung berechnen, zuletzt aber die Anzahl der fehlenden Kugeln, als einen neuen ähnlichen Kugel-Haufen berechnen, und von ersterer Zahl subtrahiren.

$$\text{I. } u = a + (n-1)\cdot d + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot d' + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3}\cdot d'';$$

$$\text{II. } s = na + \frac{n(n-1)}{2}\cdot d + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\cdot d' + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot d''.$$

Anmerkung. Man sieht nun, wie sich arithmetische Reihen aller höhern Ordnungen denken, und für jede das n^{te} Glied und die Summe von n Gliedern hinschreiben lassen. — Die figurirten Reihen, von denen die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc. ꝛc. die erste ist, und die auseinander gebildet werden, wenn man zum n^{ten} Gliede einer jeden folgenden, die Summe von n ersten Gliedern der nächst vorhergehenden Reihe nimmt, sind ebenfalls in ihrer Folge arithmetische Reihen der 1^{sten}, 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten} u. s. w. Ordnung.

IV. Von den geometrischen Reihen.

§. 6. Eine Reihe, wie z. B.

5, 15, 45, 135, 405, 1215, ꝛc. ꝛc.

in welcher die Quotienten je zweier auf einander folgenden Glieder, $\frac{15}{5}$, $\frac{45}{15}$, $\frac{135}{45}$, ꝛc. ꝛc. denselben Werth haben, nennt man eine geometrische Progression oder eine geometrische Reihe.

Ist a das erste, u das n^{te} Glied, s die Summe aller n Glieder einer geometrischen Reihe

$$a,\ a\cdot d,\ a\cdot d^2,\ a\cdot d^3,\ a\cdot d^4,\ a\cdot d^5,\ \text{etc., etc.,}$$

deren Exponent d ist, so hat man allemal

$$\text{I. } u = a\cdot d^{n-1} \quad \text{und} \quad \text{II. } s = \frac{du - a}{d-1} = \frac{d^n - 1}{d-1}\cdot a.\ ^{*)}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man aber, wenn von den 5 Elementen a, n, d, u, s irgend drei gegeben sind, die übrigen beiden durch Rechnung zu finden versuchen. Allein in den 20 Fällen, welche hier sich ergeben, sind mehrere theils algebraische Gleichungen vom höhern Grade, theils auch transcendente

---

*) Die Formel I. fällt in die Augen. Die II. dagegen ergiebt sich, wenn man

$$s = a + a\cdot d + a\cdot d^2 + a\cdot d^3 + \cdots + a\cdot d^{n-1}$$

hinschreibt, und diese Gleichung mit 1—d oder mit d—1 multiplicirt, weil sich dann rechts alle Glieder wegheben, bis auf $a - a\cdot d^n$ oder $a\cdot d^n - a$.

Gleichungen zu lösen, und dadurch sieht man sich in seinen Arbeiten hie und da mehr oder weniger aufgehalten.

Wird z. B. aus a, u und d die Anzahl n der Glieder, oder aus a, u und n der Exponent d gesucht, so würde die Gleichung I. augenblicklich geben

$$d^{n-1} = \frac{u}{a}, \quad (n-1) \cdot log\, d = log\, u - log\, a;$$

also $log\, d = \frac{log\, u - log\, a}{n-1}$, oder auch $n = 1 + \frac{log\, u - log\, a}{log\, d}$.

Würde aber aus a, d und s die Zahl n gesucht, so müßte man aus der Gleichung II. zuerst d^n finden, nämlich

$$d^n = 1 + \frac{(d-1)s}{a},$$

dann die Logarithmen links und rechts nehmen, so daß man erhielte

$$n \cdot log\, d = log \left(1 + \frac{(d-1)s}{a}\right),$$

zuletzt aber n daraus berechnen.

V. Von den Permutationen oder Versetzungen.

§. 7. Zwei Elemente a und b lassen 2 verschiedene Anordnungen (Versetzungen, Permutationen) zu, nämlich ab und ba.

Drei Elemente a, b, c lassen 2·3 verschiedene Anordnungen abc, acb, bac, bca, cab, cba zu.

Vier Elemente a, b, c, d lassen 2·3·4 verschiedene Anordnungen zu, weil, während jedes der 4 Elemente voransteht, die drei übrigen allemal 2·3 Anordnungen haben.

Im Allgemeinen lassen n verschiedene Elemente die Anzahl 1·2·3·4·5·6···n verschiedener Anordnungen zu, welches Produkt wir hier der Kürze wegen durch n! bezeichnen wollen.

§. 8. Sind aber die n Elemente nicht alle von einander verschieden, sondern kommt eines darunter αmal vor, so ist die Anzahl aller möglichen Anordnungen bloß noch $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha}$ oder $\frac{n!}{\alpha!}$.

Kommt auch noch ein zweites Element mehreremale vor, z. B. βmal, so ist die Anzahl aller Anordnungen nur noch

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \beta} \quad \text{oder} \quad \frac{n!}{\alpha!\ \beta!}.$$

Kommt zu gleicher Zeit noch ein 3tes Element γmal vor, so ist die Anzahl aller möglichen Anordnungen nur noch

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots n}{1 \cdot 2 \cdots \alpha \times 1 \cdot 2 \cdots \beta \times 1 \cdot 2 \cdots \gamma} \text{ oder } = \frac{n!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma!}.$$

U. s. w. f.

Die Verbindung abbbccdddd läßt demnach $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ $= \frac{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2}$ oder 12600 verschiedene Anordnungen zu; nicht mehr und nicht weniger.

VI. Von den Kombinationen und Variationen.

§. 9. Nimmt man eine Anzahl Elemente, z. B. a, b, c, d; und verbindet man diese zu zweien, so daß man jede Verbindung zugleich mit allen ihren Versetzungen erhält, z. B. ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc, so hat man die zweite Klasse der Variationen; nimmt man aber bloß die wohlgeordneten Verbindungen, nämlich ab, ac, ad, bc, bd und cd, so hat man die zweite Klasse der Kombinationen aus den gegebenen Elementen a, b, c, d.

Verbindet man die Elemente zu dreien und so, daß man jede Verbindung zugleich mit allen Versetzungen bekommt, nämlich abc, acb, bac, bca, cab, cba, — abd, adb, bad, bda, dab, dba, — acd, adc, cad, cda, dac, dca — bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb, so hat man die dritte Klasse der Variationen; nimmt man aber bloß die wohlgeordneten Verbindungen, nämlich abc, abd, acd und bcd, so hat man die dritte Klasse der Kombinationen aus den gegebenen Elementen a, b, c, d.

U. s. w. f.

Alle diese Variationen und Kombinationen sind wieder ohne Wiederholungen, wie die vorstehenden, oder mit Wiederholungen, wenn nämlich zu der 2ten Klasse noch hinzutreten die Verbindungen aa, bb, cc und dd; dagegen zur dritten Klasse noch hinzutreten die Verbindungen aaa, bbb, ccc, ddd, aab, aac, aad, abb, bbc, bbd, acc, bcc, ccd, add, bdd, cdd und

zwar bloß die hier angegebenen wohlgeordneten, im Falle von Kombinationen die Rede ist, — oder dieselben zugleich mit allen Versetzungen aba, baa, aca, caa, etc. etc., im Falle sich's um Variationen handelt.

§. 10. Nimmt man n Elemente a, b, c, d,···, so ist

I. die Anzahl aller Verbindungen zu zweien, die man aus diesen n Elementen bilden kann,

1) bei den Variationen mit Wiederh. $=n^2$;

2) bei den " ohne " $=n(n-1)$;

3) bei den Kombinationen mit Wiederh. $=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$;

4) bei den " ohne " $=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$.

II. Dagegen ist die Anzahl der Verbindungen zu dreien, welche aus denselben n Elementen gemacht werden können,

1) b. d. Variat. mit Wiederh. $=n^3$;

2) b. d. " ohne " $=n(n-1)(n-2)$;

3) b. d. Kombinat. mit Wiederh. $=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$;

4) b. d. " ohne " $=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$.

III. Allgemein: Die Anzahl der Verbindungen zu m Dingen, welche sich aus den gegebenen n Elementen a, b, c, d, etc. etc. bilden lassen, sind in denselben 4 Fällen, der Reihe nach

1) Var. mit W. $=n^m$;

2) " ohne W. $=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)$;

3) Komb. mit W. $=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots m}$;

4) " ohne W. $=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots m}$.

VII. Beweis des binomischen Lehrsatzes für ganze Exponenten.

§. 11. Eine der schönsten Anwendungen, welche man von der Lehre der Permutationen und Kombinationen machen kann,

ist die Entwickelung von $(a+b)^m$. — Multiplicirt man nämlich $a+b$ mit $a+b$, so erhält man $aa+ab+ba+bb$. Multiplicirt man dieses noch einmal mit $a+b$, so ergiebt sich

$$aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb.$$

Fährt man so fort mit $a+b$ zu multipliciren, um nach und nach nicht bloß $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, sondern auch noch jede höhere Potenz von $a+b$ zu erhalten, so fällt in die Augen, daß $(a+b)^m$ aus allen Variations-Verbindungen besteht, welche aus den 2 Elementen a, b zu je m gebildet werden können*), wenn nur zuletzt alle Verbindungen als Produkte angesehen und als solche zu einander addirt werden. Nun läßt aber z. B. die Verbindung a^5b die Zahl $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$, d. h. 6 Anordnungen zu; sie kommt also als Produkt 6 mal vor, und diese 6 Produkte geben, weil sie alle 6 einander gleich sind, zusammen addirt, $6\cdot a^5b$. — Ferner läßt die Verbindung a^4b^2 die Anzahl $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\times1\cdot2}$, d. h. $\frac{6\cdot5}{1\cdot2}$ oder 15 verschiedene Anordnungen zu. Diese 15 gleichen Produkte addirt, geben $15\cdot a^4b^2$. — Fährt man so fort, so bekommt man ohne Weiteres

$$(a+b)^6=a^6+6\cdot a^5b+15\cdot a^4b^2+20\cdot a^3b^3+15\cdot a^2b^4+6\cdot ab^5+b^6.$$

Und weil die Verbindung $a^{m-\mu}b^\mu$ die Anzahl

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots m}{1\cdot2\cdot3\cdots(m-\mu)\times1\cdot2\cdot3\cdots\mu}$$

oder $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\mu+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\mu}$ Verbindungen zuläßt, so ist allgemein $(a+b)^m$ = der Summe aller Glieder, welche aus

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\mu+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\mu}\cdot a^{m-\mu}b^\mu$$

hervorgehen, wenn man statt μ nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, ... bis zuletzt m selbst, setzt.

---

*) So z. B. besteht $(a+b)^6$ aus den Verbindungen

a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5 und b^6,

jede aber zugleich mit allen ihren Versetzungen genommen.

Es ist also

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} \cdot a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{m-3}b^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{m-4}b^4 + \cdots\cdots + b^m.$$

VIII. Der trinomische Lehrsatz.

§. 12. Auf dieselbe Weise findet sich $(a+b+c)^m =$ der Summe aller Glieder, welche aus

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\mu-\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu} \cdot a^{m-\mu-\nu}b^{\mu}c^{\nu}$$

hervorgehen, wenn man in diesem, statt μ und ν nach und nach 0, 1, 2, 3, 4⋯ bis zuletzt m selbst setzt, so nämlich, daß, wenn statt μ irgend einer dieser Werthe gesetzt ist, dann statt ν nach und nach 0, 1, 2, 3⋯ bis $m-\nu$ gesetzt werden muß.

Man kann die einzelnen Glieder gleich so ordnen, daß die Potenzen von a in ihrer Ordnung auf einander folgen. Zu dem Ende giebt man dem μ und ν, nach und nach alle Werthe, welche 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. ꝛc. sind und deren Summe $\mu+\nu$ nach und nach zuerst 0, dann 1, dann 2, dann 3, u. s. w. f. wird.

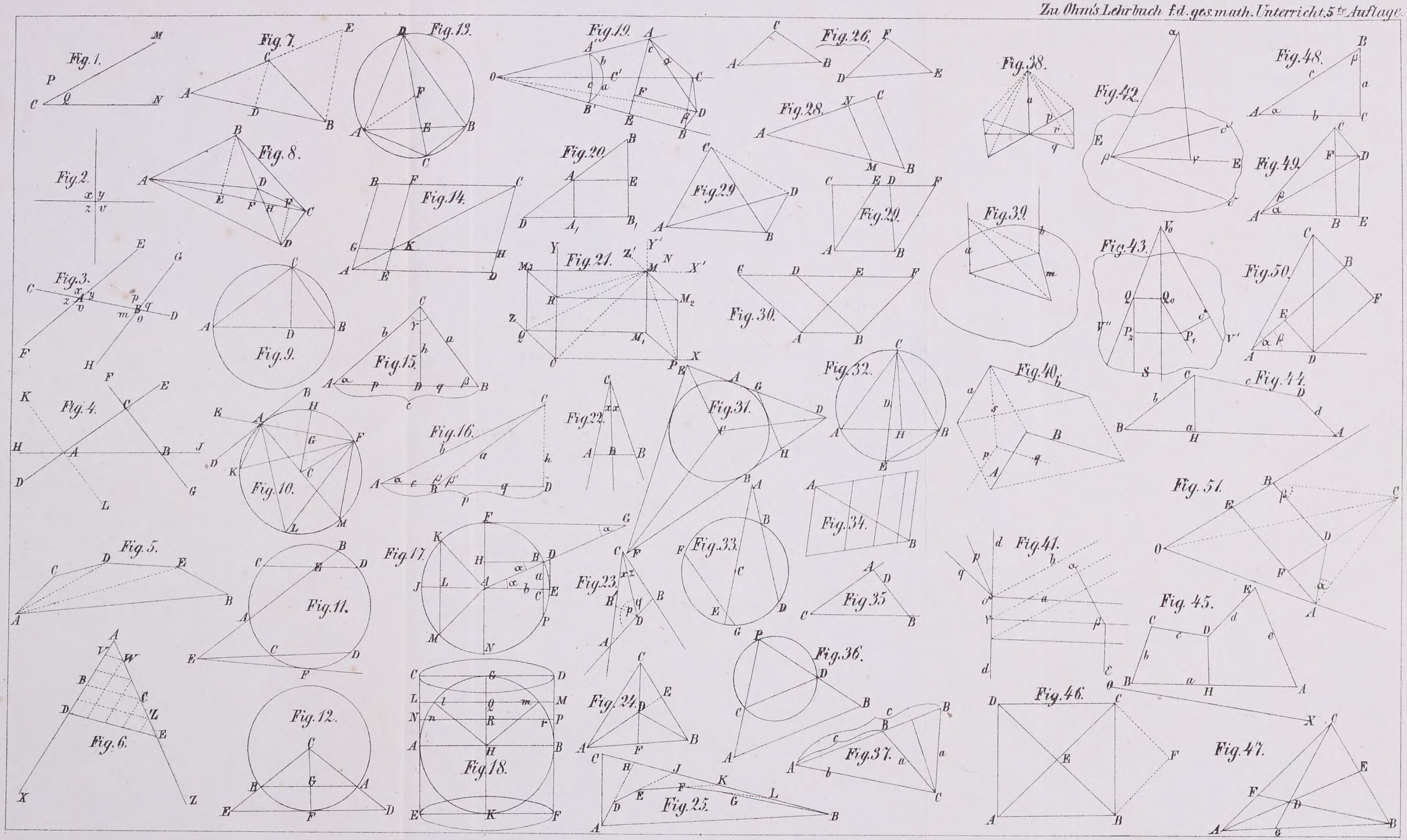
Anmerkung. Man sieht, wie man auf diesem Wege einen quatrinomischen, ꝛc. ꝛc. und überhaupt einen polynomischen Lehrsatz mit der größten Leichtigkeit hinschreiben kann.

---

*

Druck von A. Edelmann in Leipzig.

Zu Ohm's Lehrbuch f. d. ges. math. Unterricht. 5te Auflage.



Ohm, Martin, 1792-1872

Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht an Gymnasien, Realschulen, höhern Bürger- und Militär-Schulen

Leipzig 1856